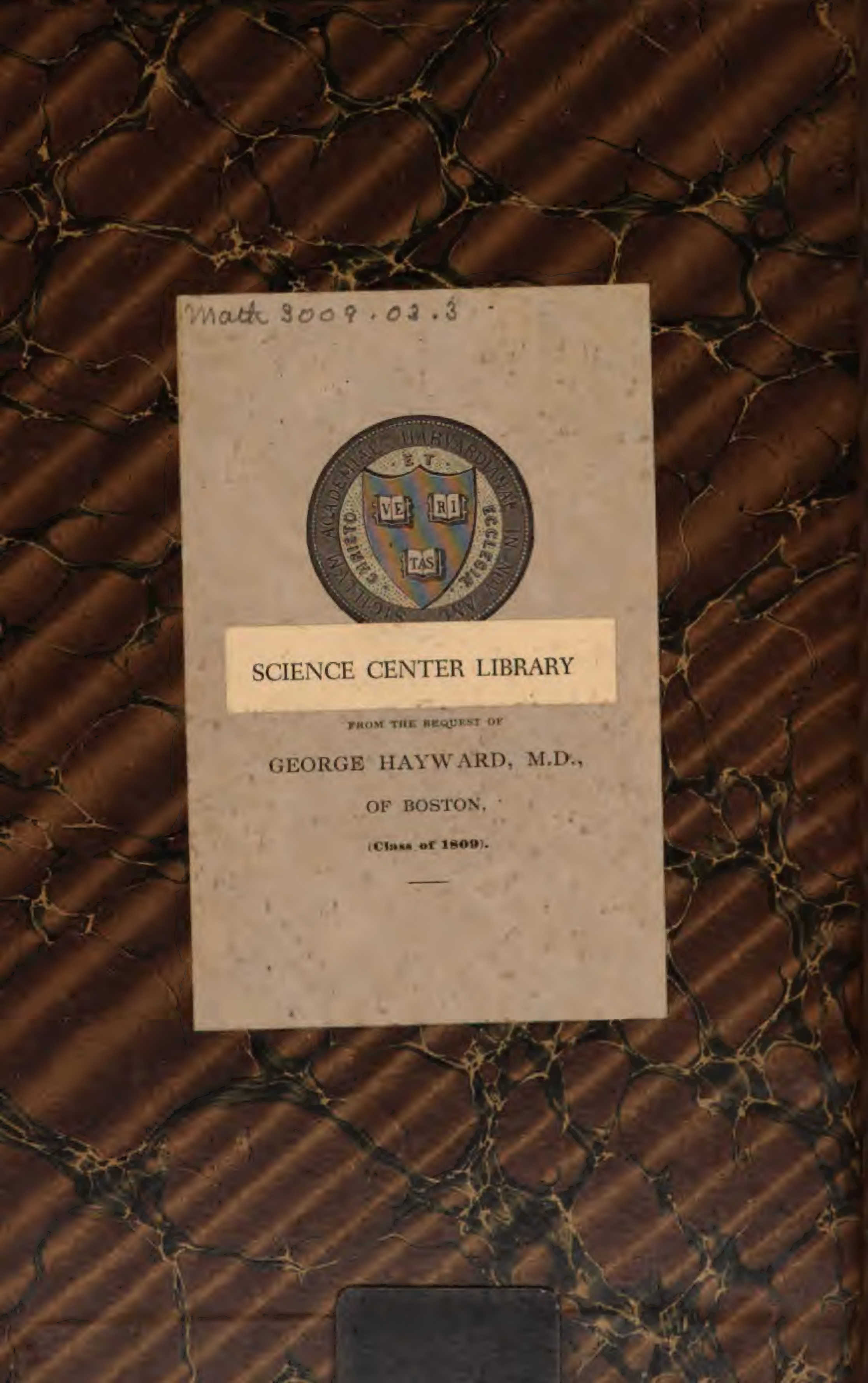





Math 3009.02.3
VE RI TAS
SCIENCE CENTER LIBRARY
FROM THE BEQUEST OF
GEORGE HAYWARD, M.D.,
OF BOSTON,
(Class of 1809).


ALPHONSE
PICARD & FILS
EDITEURS
RUE BONAPARTE
82
PARIS VIe ARROND^T
LIBRAIRIE
ANCIENNE
D'OCCASION
COMMISSION
LIVRES NEUFS
FRANÇAIS
&
ETRANGERS

COURS
D'ANALYSE

PROFESSÉ A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

PAR

G. HUMBERT,

MEMBRE DE L'INSTITUT,
PROFESSEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

TOME II.

COMPLÉMENTS DU CALCUL INTÉGRAL.
FONCTIONS ANALYTIQUES ET ELLIPTIQUES.
ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.



PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1904

COURS
D'ANALYSE.

32595 PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS,
Quai des Grands-Augustins, 55.

COURS
D'ANALYSE

PROFESSÉ A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

PAR

G. HUMBERT,

MEMBRE DE L'INSTITUT,

PROFESSEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

TOME II.

COMPLÉMENTS DU CALCUL INTÉGRAL.
FONCTIONS ANALYTIQUES ET ELLIPTIQUES.
ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1904

PRÉFACE.

Le plan de ce Livre lui attirera sans doute deux reproches opposés : les Géomètres s'étonneront d'y voir traitées si rapidement des questions si diverses, sans que la place mesurée à chacune d'elles corresponde à son importance scientifique; les Ingénieurs pourront trouver superflus les Chapitres consacrés aux Fonctions analytiques et aux Fonctions elliptiques.

C'est que l'École Polytechnique n'est ni une école de pure théorie, ni une école de pure application. Elle ne cherche pas à former *directement* des savants ou des praticiens. Son but, nettement défini par ses fondateurs, est de donner à de futurs Élèves-Ingénieurs, militaires ou civils, une instruction scientifique étendue et solide, qui leur permette plus tard non seulement de diriger, mais de perfectionner les services publics auxquels ils seront attachés.

Ces principes généraux déterminent avec précision le caractère du *Cours d'Analyse* professé en seconde année.

La place la plus importante y est due aux Théories fondamentales dont la Mécanique, la Physique, l'Art de l'Ingénieur ou du Constructeur font un perpétuel usage : j'ai donc consacré la moitié de mes leçons aux Équations différentielles, qui interviennent dans la plupart des problèmes que nous posent les Sciences appliquées, et dont l'étude est d'ailleurs la question maîtresse de l'Analyse; j'ai insisté spécialement sur les procédés d'intégration et de réduction, en les éclairant par des exemples

variés; j'ai donné enfin une idée des méthodes employées pour l'étude directe des solutions, principalement dans le cas particulier des équations linéaires. En vertu des mêmes principes, j'ai développé avec soin la Théorie des Intégrales multiples, si utile à l'Électricien; j'en ai fait des applications à la Géométrie, à la Mécanique; j'y ai rattaché, en quelques pages, les Intégrales Eulériennes.

Mais le but de l'institution polytechnique n'eût pas été atteint si le *Cours d'Analyse* n'avait dépassé ce cadre un peu étroit, mesuré aux besoins actuels des Écoles d'Ingénieurs : en vue des perfectionnements possibles de l'application, il était indispensable d'aller au delà, en introduisant dans le Cours des notions mathématiques d'un ordre plus élevé, simplifiées cependant par l'effort continu des Géomètres, et mûres pour l'utilisation pratique.

Ce développement de l'instruction a un autre avantage. On ne possède en effet la méthode et la sûreté qui sont nécessaires pour plier à une application nouvelle une théorie d'Analyse, même élémentaire, que si l'on est maître de celle-ci : il convient dès lors de l'avoir dépassée, de connaître ses liens avec les théories voisines qui la prolongent et l'illuminent. L'Algèbre, par exemple, et la Géométrie de Descartes, en éclairant la vieille Géométrie d'Euclide, n'en ont-elles pas rendu le maniement plus facile et plus sûr?

On comprend maintenant dans quel but ont été inscrites au Programme de ce Cours les deux Théories des Fonctions analytiques et des Fonctions elliptiques, dans leurs parties élémentaires.

La première, en raison de son importance mathématique, ne peut être ignorée de ceux qui cultivent les sciences exactes; elle intéresse aussi les fonctions réelles, dont elle précise certaines propriétés fondamentales; elle permet d'étudier les solutions des Équations différentielles quand l'intégration directe est impossible; elle conduit enfin à la doctrine des Fonctions elliptiques. Celle-ci, prolongement naturel de la Trigonométrie, offre des

applications fécondes et variées à l'Analyse, à la Géométrie, à la Mécanique; ses formules se traduisent en chiffres avec facilité; elles sont simples, souples, d'un maniement aisé, et il serait injuste d'affirmer *a priori* qu'on en a épuisé toutes les conséquences utiles.

Dans cette partie du Cours, qui remplit le milieu du Volume, j'ai réduit au minimum la théorie pure, en l'effaçant, autant que possible, devant les applications. J'ai pris comme guides les Traités classiques de Briot et Bouquet et de M. Jordan : le point de vue est donc plutôt le point de vue de Cauchy que celui de Weierstrass et d'Hermite. J'ai laissé de côté les méthodes de Riemann : elles m'étaient d'ailleurs inutiles, car les seules fonctions algébriques dont j'étudie l'intégrale dépendent d'une racine carrée. Pour les fonctions elliptiques, j'adopte les principes et les notations de Weierstrass, en me bornant à signaler l'ancienne fonction $\operatorname{sn} u$.

Le Livre complète mon Cours oral par plusieurs propositions générales sur les fonctions uniformes, et, en particulier, par les théorèmes célèbres de M. Mittag-Leffler et de Weierstrass; le Lecteur trouvera également, à la fin du Volume, quelques Exercices, traités jusqu'au bout, qui le familiariseront avec l'emploi des fonctions elliptiques.

M. Painlevé a bien voulu me donner, pour la rédaction de mes Leçons, les conseils et les directions les plus utiles; je lui adresse ici tous mes remercîments.

Paris, février 1904.

TABLE DES MATIÈRES.

PREMIÈRE PARTIE.

COMPLÉMENTS DU CALCUL INTÉGRAL.

CHAPITRE I.

INTÉGRALES MULTIPLES.

CHAPITRE II.

INTÉGRALES DE LIGNES ET DE SURFACES.

CHAPITRE III.

APPLICATIONS DIVERSES.

CHAPITRE IV.

FONCTIONS EULÉRIENNES.

DEUXIÈME PARTIE.

FONCTIONS ANALYTIQUES ET ELLIPTIQUES.

CHAPITRE I.

THÉORIE DES FONCTIONS ANALYTIQUES.

CHAPITRE II.

APPLICATIONS ANALYTIQUES.

CHAPITRE III.

FONCTIONS ELLIPTIQUES.

CHAPITRE IV.

APPLICATIONS DES FONCTIONS ELLIPTIQUES.

CHAPITRE V.

CALCULS NUMÉRIQUES.

TROISIÈME PARTIE.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

CHAPITRE I.

ÉQUATIONS DU PREMIER ORDRE.

CHAPITRE II.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES D'ORDRE QUELCONQUE.

CHAPITRE III.

SYSTÈMES D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

CHAPITRE IV.

ÉQUATIONS LINÉAIRES.

CHAPITRE V.

ÉTUDE DES INTÉGRALES D'UNE ÉQUATION LINÉAIRE.

CHAPITRE VI.

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES.

EXERCICES

SUR LA THÉORIE DES FONCTIONS ANALYTIQUES ET ELLIPTIQUES.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES

ERRATA.

Tome I.

Pages.					
37,	ligne 5 en remontant.	*Au lieu de*	$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u} d^2 u$,	*lire*	$\frac{\partial \varphi}{\partial u} d^2 u$.
51,	dernière ligne.	*Au lieu de*	MOM,	*lire*	MOM'.
75,	ligne 8,	*Après*	courbe,	*ajouter*	plane.
254,	ligne 11 en remontant.	*Après*	courbes planes,	*ajouter*	algébriques.
262,	9ᵉ ligne du n° 257.	*Au lieu de*	est	*lire*	et.
280,	ligne 7 en remontant.	*Au lieu de*	coordonnées,	*lire*	ordonnées.
301,	5ᵉ ligne du n° 294.	*Après*	l'infini,	*ajouter*	par valeurs croissantes.
309,	7ᵉ ligne du n° 302.	*Après*	positives,	*ajouter*	$(a < b)$.
351,	ligne 18.	*Au lieu de*	$n+1$,	*lire*	n.

Tome II.

48,	ligne 10.	*Au lieu de*	$G\left(\frac{\partial f}{\partial v'}\right)^2$,	*lire*	$G\left(\frac{\partial g}{\partial v'}\right)^2$.
58,	ligne 12 en remontant.	*Au lieu de*	$\rho_0^{\alpha-2}$,	*lire*	$\rho_0^{2-\alpha}$.
99,	ligne 11 en remontant.	*Au lieu de*	(n° 37),	*lire*	(n° 76).
221,	ligne 2 en remontant.	*Après*	$p(u, g_2, g_3)$,	*ajouter*	ou.
234,	ligne 10.	*Au lieu de*	se réduisent,	*lire*	se déduisent.
244,	ligne 7 de la note.	Supprimer le facteur 4 sous le premier radical.			

COURS
D'ANALYSE.

PREMIÈRE PARTIE.
COMPLÉMENTS DU CALCUL INTÉGRAL.

CHAPITRE I.
INTÉGRALES MULTIPLES.

I. — NOTION DE L'INTÉGRALE MULTIPLE.

1. Retour sur la notion d'aire. — La définition analytique de l'aire, donnée aux n°s 274-275 du Tome I, a besoin d'être précisée et dégagée de certaines liaisons géométriques.

Soit, dans le plan, un champ fini, C, limité par un contour γ, et rapporté à deux axes quelconques, Ox et Oy, faisant entre eux un angle θ. Sur chaque axe marquons les points de coordonnées entières, ..., -3, -2, -1, 0, $+1$, $+2$, $+3$, ...; partageons chacun des segments obtenus en deux parties égales, puis chacune de celles-ci en deux autres égales, et ainsi de suite. A un instant quelconque de cette division, menons, par chacun des points marqués sur un axe, des parallèles à l'autre axe : cette réglure partage le plan en *losanges* égaux.

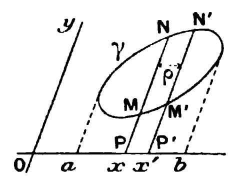
Considérons, à un instant quelconque, ceux des losanges qui

sont situés *tout entiers* à l'intérieur du champ C : leur aire *totale* ne peut évidemment que s'accroître quand on passe d'une division à la suivante, puisque chacun des losanges primitifs se trouve alors partagé en huit autres, également intérieurs à C, et que de nouveaux losanges peuvent s'y ajouter. D'ailleurs, l'aire totale considérée reste évidemment inférieure à un nombre fixe, par exemple à l'aire d'un losange de côtés parallèles aux axes, comprenant le champ :, elle tend donc vers une limite finie A, que l'on nommera *aire du champ* C, par rapport aux axes Ox et Oy.

De même, si l'on considère l'ensemble des losanges qui, à un instant quelconque, sont tout entiers à l'intérieur du champ C, ou dont une partie seulement est dans C, leur aire totale ne peut que décroître quand on passe d'une division à la suivante; comme elle reste supérieure à zéro, elle tend vers une limite finie, A' : je dis que A' est identique à A, c'est-à-dire que l'aire totale des losanges qui *mordent* sur la surface du champ a pour limite zéro.

2. Pour l'établir, supposons que le contour, γ, du champ ne soit coupé qu'en deux points, au plus, par toute parallèle à Oy; à chaque valeur de l'abscisse x comprise entre deux limites, a et b [*fig.* 1, $(a < b)$], répondent, sur le contour γ, deux points

Fig. 1.



M et N, d'ordonnées $y_1(x)$ et $y_2(x)$. Supposons que y_1 et y_2 soient des fonctions continues de x dans l'intervalle ab, extrémités comprises : la continuité étant uniforme (Tome I, n° 11), soient $\eta_1(\varepsilon)$ et $\eta_2(\varepsilon)$ les modules de continuité uniforme de ces deux fonctions, pour le nombre ε; si η est le plus petit des deux, l'inégalité

$$(1) \qquad \operatorname{mod}(\xi' - \xi) < \eta \qquad \text{entraîne} \qquad \begin{cases} \operatorname{mod}[y_1(\xi') - y_1(\xi)] < \varepsilon, \\ \operatorname{mod}[y_2(\xi') - y_2(\xi)] < \varepsilon, \end{cases}$$

ξ et ξ' étant des valeurs de l'intervalle ab (Tome I, n° 258).

Considérons maintenant, à un instant quelconque, une division, PP′, de l'axe des x, ayant pour longueur ρ; soient x et x' les abscisses de P et P′; MP et M′P′ sont $y_1(x)$ et $y_1(x')$. Si ρ est inférieur à η, la différence des ordonnées de deux points quelconques de l'arc MM′ sera, en vertu de (1), inférieure à ε : il en résulte aisément que, à l'instant considéré, le nombre des losanges qui appartiennent à la *tranche* comprise entre les droites PMN, P′M′N′, et qui contiennent des points de l'arc MM′, est inférieur à $\frac{\varepsilon}{\rho}+2$. La même conclusion s'applique à l'arc NN′ : la somme des aires des losanges qui contiennent des points de l'un ou de l'autre arc est donc plus petite que $2(\varepsilon+2\rho)\rho\sin\theta$.

Désignons, à l'instant considéré, par ν le nombre des divisions PP′, de l'axe des x, qui comprennent des points du segment ab : chacune des divisions PP′ ayant pour longueur ρ, il résulte de ce qui précède que l'aire totale des losanges contenant des points du contour γ, c'est-à-dire *mordant* sur le champ C, est inférieure à

$$(2)\qquad \nu.2(\varepsilon+2\rho)\rho\sin\theta;$$

comme d'ailleurs $\rho\nu$ est évidemment plus petit que $b-a+2\rho$, l'expression (2) est inférieure à $2\sin\theta(\varepsilon+2\rho)(b-a+2\rho)$, quantité qui peut décroître, avec ε et ρ, au-dessous de toute limite.

C. Q. F. D.

La démonstration est la même pour un contour rencontré par une parallèle à Oy en un nombre de points supérieur à deux, mais fini.

3. **Expression analytique de l'aire.** — Reprenons la tranche des losanges compris, à un même instant, entre les droites PMN et P′M′N′ : ceux d'entre eux qui sont complètement intérieurs au champ C forment une file dont la longueur, comptée parallèlement à Oy, est *au plus* égale à MN; ceux qui sont intérieurs à C et ceux qui mordent sur C forment une file, de longueur *au moins* égale à MN : sous une autre forme, la quantité $\text{MN}\,\rho\sin\theta$ est comprise entre les aires de ces deux files. En répétant le même raisonnement pour toutes les tranches, on voit que la somme

$$(3)\qquad \Sigma\,\text{MN}\rho\sin\theta,\qquad\text{ou}\qquad \Sigma[y_2(x)-y_1(x)](x'-x)\sin\theta,$$

étendue à toutes les divisions PP′, est comprise entre l'aire totale des losanges intérieurs à C et l'aire totale des losanges intérieurs à C ou mordant sur C. Ces deux dernières aires ayant une même limite, A, qui est l'aire du champ, il en sera de même de la somme (3). D'ailleurs celle-ci a évidemment pour limite l'intégrale définie $\sin\theta \int_a^b [y_2(x) - y_1(x)]\, dx$, de sorte que l'on a

$$A = \sin\theta \int_a^b [y_2(x) - y_1(x)]\, dx. \tag{4}$$

Si l'on avait procédé par tranches parallèles à Ox, on aurait trouvé de même :

$$A = \sin\theta \int_c^d [x_2(y) - x_1(y)]\, dy, \tag{4 bis}$$

les notations s'expliquant d'elles-mêmes.

Plus généralement, si le contour de l'aire est rencontré par une parallèle à l'axe des y, d'abscisse x, en un nombre fini de points, et si $\lambda(x)$ est la longueur totale que le champ intercepte sur cette parallèle, on aura, pour A,

$$A = \sin\theta \int_a^b \lambda(x)\, dx, \tag{5}$$

et une expression semblable par une intégrale en y.

4. Influence du choix des axes. — L'aire d'un champ, telle que nous l'avons définie, dépend, en apparence, du choix des axes de coordonnées; nous allons montrer qu'elle en est indépendante.

Tout d'abord, dans les expressions (4), (4 *bis*) et (5) de A, n'intervient évidemment que la *direction* des axes; comme d'ailleurs un changement d'axes autour de l'origine peut s'opérer en modifiant les deux axes l'un après l'autre, il suffira d'établir que l'expression (5) garde la même valeur quand on conserve l'axe Oy, en changeant l'axe des x, l'origine demeurant fixe.

Soient donc Ox et Ox_1 l'ancien et le nouvel axe des x; θ et θ_1 les angles yOx et yOx_1; on a, pour l'aire du champ dans les deux systèmes,

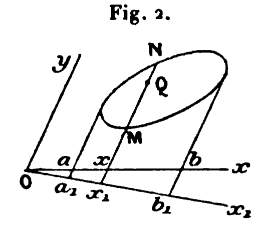
$$A = \sin\theta \int_a^b \lambda(x)\, dx, \qquad A_1 = \sin\theta_1 \int_{a_1}^{b_1} \lambda_1(x_1)\, dx_1.$$

D'ailleurs (*fig.* 2), les abscisses ancienne et nouvelle d'un même point, Q, du plan, x et x_1, sont liées par

$$(6) \qquad x \sin\theta = x_1 \sin\theta_1;$$

enfin, si x et x_1 vérifient cette relation, les deux fonctions

Fig. 2.



$\lambda(x)$ et $\lambda_1(x_1)$ sont égales, puisque toutes deux représentent la longueur MN. Cela posé, faisons, dans l'intégrale A_1, le changement de variable défini par (6); il vient, en vertu de ce qui précède,

$$A_1 = \sin\theta_1 \int_a^b \lambda(x)\,dx \frac{\sin\theta}{\sin\theta_1} = \sin\theta \int_a^b \lambda(x)\,dx = A,$$

car

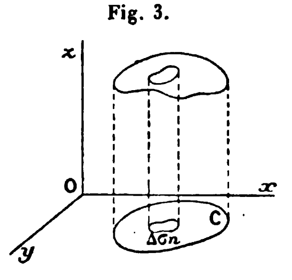
$$a \sin\theta = a_1 \sin\theta_1, \qquad b \sin\theta = b_1 \sin\theta_1,$$

ainsi que le montre immédiatement la *fig.* 2.

La définition de l'aire ayant maintenant une base analytique solide, nous pouvons passer à celle de l'intégrale double.

5. Intégrale double. — Pour les anciens analystes, la notion d'intégrale double se rattachait à celle de volume, de même que

Fig. 3.



la notion d'intégrale simple se rattachait à la notion d'aire. Soit en effet, dans le plan des xy (axes rectangulaires), une aire limitée, C (*fig.* 3) : pour évaluer le volume compris entre la

surface $z = f(x, y)$, le plan des xy et le cylindre droit ayant pour base C, on peut décomposer l'aire C en éléments très petits, $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \ldots, \Delta\sigma_n, \ldots$, et, si l'on désigne par x_n, y_n un point quelconque de l'élément $\Delta\sigma_n$, on comprend intuitivement que le volume proposé est la limite de la somme

$$\Sigma f(x_n, y_n)\,\Delta\sigma_n,$$

lorsque les dimensions des éléments $\Delta\sigma_n$ tendent vers zéro dans tous les sens. Cette limite se représente par le symbole

$$\int\!\!\int_C f(x, y)\,d\sigma, \quad \text{ou} \quad S_C f(x, y)\,d\sigma;$$

sa signification géométrique montre qu'elle est indépendante du mode de division de l'aire C en éléments, ainsi que du choix du point x_n, y_n dans chaque élément. En particulier, si l'on divise C en éléments infiniment petits par des parallèles à Ox, distantes de dy, et par des parallèles à Oy, distantes de dx, l'élément d'aire $d\sigma$ sera $dx\,dy$, et l'intégrale double s'écrira

$$\int\!\!\int_C f(x, y)\,dx\,dy.$$

6. Théorème. — Il est clair que cette définition est tout à fait insuffisante, au point de vue analytique, comme l'était celle de l'intégrale simple par une aire. Mais on peut, en admettant la continuité de la fonction $f(x, y)$ dans l'aire C et sur son contour, et en supposant cette aire limitée, établir la proposition suivante :

Si l'on décompose l'aire C, supposée d'un seul tenant, en éléments de surface $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \ldots, \Delta\sigma_n, \ldots$, et si x_n, y_n, est un point quelconque pris à l'intérieur de l'élément $\Delta\sigma_n$, ou sur son contour, la somme

$$\Sigma f(x_n, y_n)\,\Delta\sigma_n,$$

tend, lorsque les dimensions des éléments $\Delta\sigma_n$ ont pour limite zéro dans tous les sens, vers une limite finie et déterminée, indépendante du mode de décomposition de l'aire C et du choix des points x_n, y_n.

7. Pour le démontrer, suivons exactement la même marche que dans la théorie de l'intégrale définie (Tome I, n° 259).

On commence par considérer un mode de décomposition particulier de l'aire C et un choix particulier des points x_n, y_n. A cet effet on marque, sur les axes Ox et Oy, supposés rectangulaires, les points aux distances $\ldots, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \ldots$ de l'origine, et par chacun de ces points on mène les perpendiculaires à l'axe correspondant; on divise ensuite chaque intervalle, sur Ox et sur Oy, en deux autres égaux; par les nouveaux points de division on mène encore des perpendiculaires; et ainsi de suite. A chaque période de cette division, on a décomposé le plan en carrés égaux : soit alors, à un instant quelconque, $\Delta\sigma_n$ l'aire d'un de ces carrés compris entièrement dans l'aire C, ou la portion d'aire intérieure à C d'un carré non compris entièrement dans C; si m_n est le minimum de $f(x,y)$ pour les points x, y de l'aire $\Delta\sigma_n$ et de son contour, on considère la somme

$$S = \Sigma m_n \Delta\sigma_n,$$

et l'on démontre qu'elle a une limite finie et déterminée en observant : 1° qu'elle est inférieure à MC, M étant le maximum de $f(x, y)$ dans l'aire C, et C étant la valeur de cette aire; 2° qu'elle croît quand l'on passe d'une division à la suivante.

Soit $S_C f(x,y)\,d\sigma$ la limite ainsi obtenue; on établit ensuite, en calquant les raisonnements du n° 260, Tome I, les corollaires suivants.

Corollaire 1°. — Si l'on partage l'aire C en deux autres C_1 et C_2, par une ligne A, on a

$$S_C = S_{C_1} + S_{C_2}.$$

En effet, à un instant quelconque de la division de l'aire en carrés, désignons par S, S_1, S_2 les sommes qui ont pour limites S_C, S_{C_1}, S_{C_2}; la différence $S - S_1 - S_2$ provient seulement des carrés ou portions de carrés intérieurs à C, et traversés par la ligne A. Soient s la somme des aires de ces carrés, M_0 le maximum du module de $f(x,y)$ dans C et sur son contour; la différence $S - S_1 - S_2$ est évidemment, en valeur absolue, inférieure à $2M_0 s$: or il est clair que s tend vers zéro avec les côtés des carrés, ce qui établit la proposition.

Plus généralement, si l'on partage l'aire C en p autres C_1, C_2, ..., C_p, on a de même

$$(1) \qquad S_C = S_{C_1} + S_{C_2} + \ldots + S_{C_p}.$$

Corollaire 2°. — Les m_n étant compris entre le minimum, m, et le maximum, M, de $f(x, y)$ dans C, on a évidemment

$$m \Sigma \Delta\sigma_n < \Sigma m_n \Delta\sigma_n < M \Sigma \Delta\sigma_n,$$

et, à la limite, en désignant par C l'aire du champ C,

$$m C < S_C f(x, y)\, d\sigma < MC,$$

d'où

$$S_C f(x, y)\, d\sigma = \mu C,$$

μ étant compris entre m et M. Comme $f(x, y)$ prend la valeur μ en un point ξ, η de C ou de son contour (Tome I, n° 8), on a

$$(2) \qquad S_C f(x, y)\, d\sigma = C f(\xi, \eta).$$

C'est le *théorème de la moyenne*.

Montrons enfin que la somme $\Sigma f(x_n, y_n)\, \Delta\sigma_n$, où la loi de décomposition de l'aire C et le choix du point x_n, y_n dans l'élément $\Delta\sigma_n$ sont arbitraires, a pour limite $S_C f(x, y)\, d\sigma$. On a, par (1) et (2),

$$\begin{aligned} S_C f(x, y)\, d\sigma &= S_{\Delta\sigma_1} + S_{\Delta\sigma_2} + \ldots + S_{\Delta\sigma_n} + \ldots \\ &= \Delta\sigma_1 f(\xi_1, \eta_1) + \ldots + \Delta\sigma_n f(\xi_n, \eta_n) + \ldots, \end{aligned}$$

ξ_n, η_n étant un point de l'élément $\Delta\sigma_n$ ou de son contour. On en conclut :

$$(3) \qquad \Sigma f(x_n, y_n)\, \Delta\sigma_n - S_C f(x, y)\, d\sigma = \Sigma \Delta\sigma_n [f(x_n, y_n) - f(\xi_n, \eta_n)].$$

Mais $f(x, y)$ est uniformément continue (Tome I, n° 11) dans l'aire C : cette fonction admet donc, pour tout nombre ε, un module de continuité uniforme $\eta(\varepsilon)$, c'est-à-dire que, si les différences $x' - x$ et $y' - y$ sont, en valeur absolue, inférieures, à $\eta(\varepsilon)$, la différence $f(x', y') - f(x, y)$ est inférieure à ε. Or les aires $\Delta\sigma_n$ tendant vers zéro, il arrivera un moment à partir duquel chacune d'elles sera comprise dans un carré dont les côtés, parallèles aux axes, ont pour longueur $\eta(\varepsilon)$: alors les différences $x_n - \xi_n$ et $y_n - \eta_n$ resteront, en valeur absolue, inférieures à $\eta(\varepsilon)$, puisque

les deux points ξ_n, η_n et x_n, y_n appartiennent à l'aire $\Delta\sigma_n$ ou à son contour; la différence $f(x_n, y_n) - f(\xi_n, \eta_n)$, restera donc, en valeur absolue, inférieure à ε, et l'on aura dès lors, d'après (3),

$$\text{mod}[\Sigma f(x_n, y_n)\Delta\sigma_n - \mathrm{S_C} f(x, y)\, d\sigma] < \varepsilon\Sigma\,\Delta\sigma_n = \varepsilon \mathrm{C},$$

ce qui démontre le théorème.

La limite dont l'existence est ainsi établie se nomme *l'intégrale double* de la fonction $f(x, y)$, prise dans le *champ d'intégration* C, et se représente par les notations indiquées au n° 5.

8. Volumes. — Soit, dans l'espace, un solide fini, S, limité par une surface fermée, Σ. Désignons par Ox, Oy, Oz trois axes rectangulaires, sur chacun desquels nous marquerons les points de coordonnées entières, ..., $-3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \ldots$. Partageons chacun des segments obtenus en deux parties égales, puis chacune de celles-ci en deux autres égales, et ainsi de suite. A un instant quelconque de cette division, menons, par chacun des points marqués, des plans normaux à l'axe correspondant : nous partageons ainsi l'espace en cubes égaux.

On reconnaît, par des raisonnements semblables à ceux des nos 1-2,

1° Que le volume total des cubes intérieurs au solide S tend vers une limite V;

2° Que le volume total des cubes intérieurs à S et des cubes qui *mordent* sur S tend vers une limite V′;

3° Que ces deux limites coïncident.

Leur valeur commune, V, sera, par définition, le volume du solide S par rapport aux axes Ox, Oy, Oz.

Il est aisé d'en donner une expression analytique.

Considérons la *tranche* des cubes qui, à un instant quelconque de la division, est comprise entre deux plans successifs, normaux à Oz, de cotes z et z' ($z' > z$) : le solide S intercepte, sur le plan de cote z, une portion d'aire $\sigma(z)$. Or ceux des cubes de la tranche considérée qui sont complètement intérieurs à S ont évidemment un volume total inférieur à $(z' - z)\sigma(z)$; ceux qui sont intérieurs à S et ceux qui *mordent* sur S ont un volume total supérieur à la même quantité. En répétant le même raisonnement

pour toutes les tranches on voit que la somme

$$\Sigma(z'-z)\,\sigma(z), \tag{4}$$

étendue à toutes les divisions $z'-z$ de l'axe des z, est comprise entre le volume total des cubes intérieurs à S et le volume total des cubes intérieurs ou mordant sur S : elle a donc pour limite le volume V du solide. D'ailleurs la somme (4), d'après sa forme même, tend, lorsque les divisions $z'-z$ décroissent indéfiniment, vers l'intégrale définie $\int_a^b \sigma(z)\,dz$, a et b désignant le minimum et le maximum de la cote z d'un point de la surface limite du solide. On a donc

$$V = \int_a^b \sigma(z)\,dz, \tag{5}$$

et, si l'on procède par tranches normales à Ox ou à Oy, on trouve de même

$$V = \int_{a_1}^{b_1} \sigma_1(x)\,dx = \int_{a_2}^{b_2} \sigma_2(y)\,dy, \tag{6}$$

les notations n'ayant pas besoin d'être expliquées.

L'expression (5) de V ne dépend évidemment que de la direction de l'axe des z; une remarque analogue s'applique aux expressions (6). Il en résulte que le volume d'un solide, tel que nous l'avons défini, est indépendant du choix des axes : car on peut toujours passer en trois temps d'un système d'axes rectangulaires à un autre de même origine, un axe étant laissé fixe à chaque temps.

9. Autres expressions du volume. — Soit C la région du plan des xy à l'intérieur de laquelle se projettent les points du solide S; à un instant quelconque, le plan des xy se trouve, d'après l'hypothèse, divisé en carrés égaux : appelons $\Delta\sigma$ l'aire d'un carré intérieur à C, ou l'aire de la partie intérieure à C d'un carré mordant sur C. L'un et l'autre des carrés considérés sert de base à une file de cubes, parallèle à Oz. Désignons par x, y les coordonnées d'un point de l'aire $\Delta\sigma$; par $\lambda(x, y)$ la longueur totale interceptée par le solide sur la parallèle à l'axe des z issue de ce point : ceux des

cubes de la file envisagée qui sont intérieurs au solide ont un volume total évidemment inférieur à $\lambda(x, y)\,\Delta\sigma$; en répétant le même raisonnement pour toutes les files qui rencontrent le solide, sommant et passant à la limite, on obtient ainsi l'inégalité

$$V \leqq \int\int_C \lambda(x, y)\,d\sigma.$$

De même, en considérant les cubes de la file qui sont intérieurs au solide ou qui mordent sur lui, on trouvera

$$V' \geqq \int\int_C \lambda(x, y)\,d\sigma;$$

on a donc rigoureusement, puisque $V' = V$ (n° 8),

$$V = \int\int_C \lambda(x, y)\,d\sigma,$$

ce qui exprime le volume par une intégrale double, car $\lambda(x, y)$ peut se calculer sans quadrature, dès qu'on connaît l'équation de la surface qui limite le solide. En procédant par files parallèles à Ox ou Oy, on obtiendra deux autres expressions analogues pour V.

10. Intégrale triple. — L'intégrale triple se définit de la manière suivante. Soit $f(x, y, z)$ une fonction de trois variables continue à l'intérieur d'un corps ou volume *limité*, V; si l'on décompose V en éléments de volume, $\Delta V_1, \ldots, \Delta V_n, \ldots$ et si x_n, y_n, z_n est un point quelconque de l'élément ΔV_n, la somme

$$\Sigma f(x_n, y_n, z_n)\,\Delta V_n$$

tend, lorsque les dimensions des éléments ΔV_n ont pour limite zéro dans tous les sens, vers une limite finie et déterminée, indépendante du mode de décomposition de V et du choix des points x_n, y_n, z_n.

Cette limite se représente par le symbole

$$\int\int\int_V f(x, y, z)\,dV, \qquad \text{ou} \qquad S_V f(x, y, z)\,dV.$$

En particulier si l'on divise le volume V en éléments infiniment

petits par des plans normaux à Ox distants de dx, à Oy distants de dy, à Oz distants de dz (axes rectangulaires), l'élément de volume ΔV sera $dx\,dy\,dz$ et l'intégrale triple s'écrira

$$\iiint f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz.$$

On démontre, comme dans le cas de l'intégrale double, que l'intégrale triple existe et a une valeur finie et déterminée, indépendante du mode de décomposition du volume V, ainsi que du choix des points x_n, y_n, z_n. Il suffit que $f(x, y, z)$ soit continue à l'intérieur et sur le contour du volume V, supposé lui-même limité dans tous les sens : ce volume est dit *champ d'intégration* de l'intégrale triple.

11. Remarque. — Pour définir une intégrale double ou triple il faut donc se donner, non seulement la fonction à intégrer, mais un *champ d'intégration,* aire pour $\iint$, volume pour $\iiint$.

Analytiquement le champ est défini par une ou plusieurs *inégalités;* par exemple, si le champ est l'intérieur du cercle $x^2+y^2=R^2$, on peut dire que l'intégrale double est étendue à tous les points x, y qui vérifient l'inégalité

$$x^2+y^2-R^2 \leqq 0.$$

L'existence de l'intégrale double ou triple n'a été établie qu'à la condition que le champ soit fini (c'est-à-dire n'ait aucun point à l'infini) et que la fonction à intégrer soit continue à l'intérieur et sur le contour de ce champ. On essaiera plus tard de s'affranchir de ces restrictions.

II. — CALCUL DES INTÉGRALES MULTIPLES.

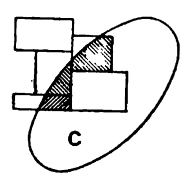
---

12. Lemme I. — Décomposons le champ C, d'une intégrale double, en rectangles, ayant leurs côtés parallèles aux axes de coordonnées, et cela d'une manière quelconque ; faisons tendre

ensuite vers zéro, suivant une loi arbitraire, les deux dimensions de chaque rectangle.

A un instant quelconque, l'aire C est ainsi décomposée en

Fig. 4.



éléments $\Delta\sigma_n$, dont certains, ombrés sur la figure, proviennent de rectangles mordant sur C. Je dis qu'on peut négliger dans la somme

$$\Sigma f(x_n, y_n)\,\Delta\sigma_n, \tag{1}$$

dont la limite est l'intégrale double $\int\int_C f(x, y)\,d\sigma$, les termes [1] qui correspondent à ces éléments ombrés. La limite de la nouvelle somme sera toujours

$$\int\int_C f(x, y)\,d\sigma.$$

La valeur absolue de la partie négligée est en effet inférieure à $M_0\sigma$, M_0 désignant le maximum du module de $f(x, y)$ dans l'aire C, et σ la somme des aires ombrées : comme σ tend évidemment vers zéro [2] en même temps que les dimensions de tous les rectangles, le lemme est établi.

On verrait de même que l'on peut remplacer dans la somme (1), sans changer sa limite, chacune des portions ombrées [3] par l'aire *totale* du rectangle auquel elle appartient.

Lemme II. — Soit l'intégrale simple $I = \int_{y'}^{y''} \varphi(y)\,dy$, où l'on suppose $y' < y''$, et où $\varphi(y)$ est une fonction continue de y.

---

(1) Ou quelques-uns seulement des termes.

(2) Car, lorsque les dimensions des rectangles deviennent suffisamment petites, l'aire ombrée totale finit par rester comprise entre la courbe C et une courbe parallèle et intérieure à C, aussi voisine qu'on veut de C.

(3) Ou quelques-unes seulement.

Désignons par $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k, \ldots, \eta_p$ des quantités croissantes, arbitrairement choisies entre y' et y''; posons, pour la symétrie des notations, $y' = \eta_0$, $y'' = \eta_{p+1}$, et soient μ_k et M_k le minimum et le maximum de $\varphi(y)$ entre η_k et η_{k+1}. Je dis que I est compris entre les deux sommes

$$\Sigma_k(\eta_{k+1} - \eta_k)\mu_k \quad \text{et} \quad \Sigma_k(\eta_{k+1} - \eta_k)M_k.$$

En effet on peut écrire

$$I = \int_{\eta_0}^{\eta_1} + \int_{\eta_1}^{\eta_2} + \ldots + \int_{\eta_k}^{\eta_{k+1}} + \ldots + \int_{\eta_p}^{\eta_{p+1}};$$

et l'on a (Tome I, n° 263, 2°)

$$(\eta_{k+1} - \eta_k)\mu_k \leqq \int_{\eta_k}^{\eta_{k+1}} \varphi(y)\,dy \leqq (\eta_{k+1} - \eta_k)M_k,$$

ce qui, par addition des inégalités analogues membre à membre, démontre la proposition.

13. Calcul de l'intégrale double. — Cela posé, pour calculer l'intégrale double

$$J = \int\int_C f(x, y)\,d\sigma,$$

nous admettrons, ce que l'on peut toujours réaliser par le partage de l'aire C en plusieurs autres, que le contour du champ n'est coupé qu'en deux points, au plus, par toute parallèle à Oy (¹).

Divisons le champ en tranches verticales par des parallèles à Oy, menées par les points $x_0, x_1, \ldots, x_m, \ldots, X_0$ de l'axe des x (*fig.* 5); x_0 et X_0 sont les abscisses extrêmes des verticales qui rencontrent le contour du champ (x_0 étant inférieur à X_0), et $x_1, \ldots, x_m, \ldots$ sont marqués arbitrairement en allant de x_0 vers X_0.

Considérons maintenant la tranche comprise entre les verticales x_m et x_{m+1}; divisons-la en rectangles par des horizontales, dont les deux extrêmes passent par les points, d'ordonnées y'_m

(¹) Pour simplifier le langage, on appellera *verticales* les parallèles à Oy; *horizontales* les parallèles à Ox.

et y''_m, où la verticale x_m rencontre le contour du champ ($y'_m < y''_m$); soient $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k, \ldots, \eta_p$ les points de division sur cette verticale.

Désignons par μ_{km} et M_{km} le minimum et le maximum de $f(x, y)$ sur le segment $\eta_k\eta_{k+1}$; en vertu de la définition de l'intégrale J et du lemme I, J est la limite commune des deux sommes doubles

$$\sum_m \sum_k (x_{m+1} - x_m)(\eta_{k+1} - \eta_k)\mu_{km}$$

et

$$\sum_m \sum_k (x_{m+1} - x_m)(\eta_{k+1} - \eta_k)M_{km}.$$

Dans chacune de ces sommes, considérons les termes qui correspondent aux rectangles de la tranche $x_m x_{m+1}$; le facteur

Fig. 5.

$x_{m+1} - x_m$ leur est commun et peut sortir du signe sommatoire Σ_k, de sorte que les deux sommes s'écrivent

$$\Sigma_m(x_{m+1} - x_m)\Sigma_k(\eta_{k+1} - \eta_k)\mu_{km}, \quad \Sigma_m(x_{m+1} - x_m)\Sigma_k(\eta_{k+1} - \eta_k)M_{km}.$$

Or μ_{km} et M_{km} sont le minimum et le maximum de $f(x, y)$ sur le segment $\eta_k\eta_{k+1}$, c'est-à-dire de la fonction $f(x_m, y)$, lorsque x_m étant regardé comme constant, y varie de η_k à η_{k+1}. Donc, en vertu du lemme II, on a

$$(2) \qquad \Sigma_k(\eta_{k+1} - \eta_k)\mu_{km} \leqq \int_{y'_m}^{y''_m} f(x_m, y)\,dy \leqq \Sigma_k(\eta_{k+1} - \eta_k)M_{km},$$

étant bien entendu que dans l'intégrale $\int_{y'_m}^{y''_m} f(x_m, y)\,dy$, x_m est regardé comme une *constante* et que la variable d'intégration

est y. Cette intégrale est dès lors une fonction de x_m, dont dépendent aussi ses limites y'_m et y''_m; appelons-la $F(x_m)$, en posant [1]

$$\int_{y'_m}^{y''_m} f(x_m, y)\,dy = F(x_m). \tag{3}$$

Multiplions maintenant par $x_{m+1} - x_m$ (quantité positive) les trois membres des inégalités (2), et faisons la somme pour tous les intervalles $x_m x_{m+1}$: nous voyons que la somme

$$\Sigma(x_{m+1} - x_m)\,F(x_m)$$

est comprise entre les deux sommes

$$\Sigma_m(x_{m+1} - x_m)\,\Sigma_k(\eta_{k+1} - \eta_k)\,\mu_{km}$$
$$\Sigma_m(x_{m+1} - x_m)\,\Sigma_k(\eta_{k+1} - \eta_k)\,M_{km}.$$

Mais, comme on l'a dit plus haut, ces deux dernières ont pour limite l'intégrale double J, lorsque les intervalles $x_m x_{m+1}$ et $\eta_k \eta_{k+1}$ tendent vers zéro; la première somme a évidemment pour limite l'intégrale simple $\int_{x_0}^{X_0} F(x)\,dx$, et l'on a dès lors, en remplaçant $F(x)$ par sa valeur (3),

$$J = \int_{x_0}^{X_0} F(x)\,dx = \int_{x_0}^{X_0} dx \left[\int_{y'}^{y''} f(x, y)\,dy\right], \tag{4}$$

y' et y'' étant les ordonnées des points où la verticale d'abscisse x rencontre le contour du champ.

On voit ainsi que l'intégrale double se calcule à l'aide de deux quadratures simples successives; dans l'intégrale simple en y, que l'on calcule d'abord, x est traité comme une constante, comme on l'a dit plus haut, de sorte que cette intégrale est une fonction de x, qui figure aussi dans ses limites y' et y''. La fonction de x obtenue ainsi doit ensuite être intégrée par rapport à x entre x_0 et X_0, ces deux limites étant des constantes absolues.

14. Remarque I. — Le résultat aurait été le même, puisque

[1] Il est facile d'établir que $F(x)$ est une fonction continue de x, entre x_0 et X_0, si y' et y'' sont elles-mêmes des fonctions continues de x dans le même intervalle, extrémités comprises.

l'intégrale double a une valeur unique, si l'on avait procédé par tranches parallèles à Ox. Si donc y_0 et Y_0 sont les ordonnées des parallèles extrêmes à Ox qui rencontrent le contour du champ, et x', x'' les abscisses (fonctions de y) où le contour est coupé par la parallèle à Ox d'ordonnée y, on aura [1]

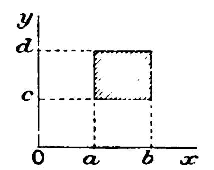
$$(5)\qquad \int_{x_0}^{X_0} dx\left[\int_{y'}^{y''} f(x,y)\,dy\right] = \int_{y_0}^{Y_0} dy\left[\int_{x'}^{x''} f(x,y)\,dx\right].$$

15. Remarque II. — Dans le cas où le champ d'intégration est un rectangle (*fig.* 6), compris entre les parallèles aux axes

$$X = a,\qquad X = b;\qquad Y = c,\qquad Y = d\qquad (a < b,\ c < d),$$

les limites y' et y'' de l'intégrale $\int_{y'}^{y''} f(x,y)\,dy$ sont indépendantes de x et égales à c et d; x_0 et X_0 sont a et b. De même,

Fig. 6.



au second membre de (5), les limites y_0 et Y_0, x' et x'', sont aussi c et d, a et b, de sorte que la formule (5) devient

$$\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)\,dy = \int_c^d dy\int_a^b f(x,y)\,dx;$$

ce qu'on exprime en disant que :

Entre des limites constantes, on peut renverser l'ordre des intégrations.

Mais on ne peut le faire avec sécurité que si la fonction $f(x,y)$ est continue dans le rectangle, supposé lui-même fini, car l'existence de l'intégrale double n'est établie que dans ces conditions.

---

[1] En supposant que les parallèles à Ox coupent le contour du champ en deux points au plus.

Règle. — *En résumé, voici la règle à retenir pour le calcul de l'intégrale double* $\int\int f(x, y)\,dx\,dy$.

On écrit

$$\int dx\left[\int f(x, y)\,dy\right];$$

dans l'intégrale $\int f(x, y)\,dy$, que l'on calcule d'abord, x est regardé comme constant, et les limites sont les valeurs de y qui correspondent aux deux points du contour du champ dont l'abscisse est x, la limite inférieure étant la plus petite de ces deux valeurs; dans l'intégrale $\int dx\left[\int f(x, y)\,dy\right]$ que l'on calcule ensuite, les limites sont la plus petite et la plus grande valeur que prend x sur le contour du champ.

16. Calcul de l'intégrale triple. — Pour calculer

$$\int\int\int_{V} f(x, y, z)\,dV \quad \text{ou} \quad \int\int\int_{V} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz,$$

on peut raisonner exactement comme on vient de le faire dans le cas de l'intégrale double; toutefois, pour abréger, nous présenterons la démonstration sous une forme moins rigoureuse et plus sommaire : il n'y aurait aucune difficulté à rétablir la rigueur.

Admettons encore, ce que l'on peut toujours réaliser par le partage du champ en plusieurs autres, que la surface qui limite le volume donné V n'est coupée qu'en deux points, au plus, par toute parallèle à l'axe des z.

Divisons le champ V en tranches verticales, par des cylindres juxtaposés, n'empiétant pas les uns sur les autres, et de génératrices parallèles à Oz (*fig.* 7).

Soient $d\sigma$ l'aire de la section (droite) d'un de ces cylindres par le plan des xy; x, y les coordonnées d'un point pris à l'intérieur ou sur le contour de cette aire; z' et z'' les cotes des deux points où la verticale du point x, y coupe le contour du champ.

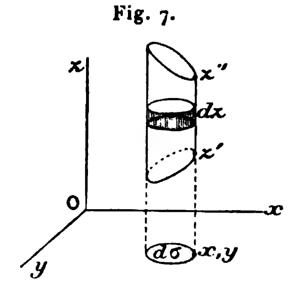
Décomposons maintenant la tranche verticale considérée en éléments de volume infiniment petits par des plans normaux à Oz, distants de dz. Si z est la cote d'un point d'un de ces éléments,

dont le volume est $d\sigma\, dz$, le terme de l'intégrale triple qui correspond à l'élément envisagé est $f(x, y, z)\, d\sigma\, dz$; la somme des termes analogues qui correspondent aux éléments du volume V situés à l'intérieur du cylindre considéré est évidemment, à la limite,

$$(6)\qquad d\sigma \int_{z'}^{z''} f(x, y, z)\, dz,$$

x et y étant regardés comme constants dans l'intégrale en z. Il faut faire maintenant, pour avoir la valeur de l'intégrale triple, la somme des expressions (6) qui correspondent à toutes les tranches

Fig. 7.



verticales comprenant des points du volume V : cette nouvelle somme s'étend par suite à toutes les aires $d\sigma$ et à tous les points x, y situés à l'intérieur du contour apparent, C, du volume V sur le plan des xy. Le résultat de la sommation est donc, à la limite, l'*intégrale double*

$$\iint d\sigma \left[\int_{z'}^{z''} f(x, y, z)\, dz\right],$$

prise dans le champ C; ce champ, répétons-le, est *l'intérieur du contour apparent* du volume V sur le plan des xy, ou encore, la région du plan des xy à l'intérieur de laquelle se projettent les points de ce volume.

Sous le bénéfice de cette définition, on a donc

$$\iiint_V f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iint_C dx\, dy \left[\int_{z'}^{z''} f(x, y, z)\, dz\right],$$

et l'on ne devra pas oublier :

1° Que z' et z'' sont fonctions de x et y;

2° Que x et y sont regardés comme constants dans l'intégration par rapport à z.

On calculera ensuite l'intégrale double par la règle donnée plus haut.

17. Remarque. — Si le volume V est l'intérieur du parallélépipède rectangle P, dont les arêtes sont parallèles aux axes et dont les faces ont pour équations

$$X = a_1, \quad X = a_2; \quad Y = b_1, \quad Y = b_2; \quad Z = c_1, \quad Z = c_2,$$

on a évidemment, en appliquant la règle ci-dessus,

$$\iiint_P f(x, y, z)\, dz = \int_{a_1}^{a_2} dx \int_{b_1}^{b_2} dy \int_{c_1}^{c_2} f(x, y, z)\, dz;$$

les limites sont donc toutes des constantes absolues. Les intégrations commencent, comme toujours, par la droite.

Par exemple

$$\iiint_P xyz\, dx\, dy\, dz = \int_{a_1}^{a_2} dx \int_{b_1}^{b_2} dy \int_{c_1}^{c_2} xyz\, dz,$$

et, puisque x et y sont regardés comme constants dans l'intégrale en z, ainsi que x dans l'intégrale en y, on peut écrire

$$\int_{a_1}^{a_2} x\, dx \int_{b_1}^{b_2} y\, dy \int_{c_1}^{c_2} z\, dz,$$

c'est-à-dire

$$\frac{c_2^2 - c_1^2}{2}\,\frac{b_2^2 - b_1^2}{2}\,\frac{a_2^2 - a_1^2}{2}.$$

De même

$$\iiint_P \varphi(x)\psi(y)\chi(z)\, dx\, dy\, dz$$
$$= \int_{a_1}^{a_2} \varphi(x)\, dx \int_{b_1}^{b_2} \psi(y)\, dy \int_{c_1}^{c_2} \chi(z)\, dz,$$

le second membre étant ainsi le *produit* de trois intégrales simples.

III. — APPLICATIONS.

1° *Volumes.*

18. Expressions diverses. — D'après le n° 9, le volume d'un solide, S, qui se projette à l'intérieur de la région finie C du plan des xy, s'exprime par l'intégrale double

$$(1) \qquad \int\int_C \lambda(x, y)\, dx\, dy,$$

$\lambda(x, y)$ désignant la longueur interceptée par le solide sur la parallèle à Oz d'abscisse x et d'ordonnée y (axes rectangulaires).

En particulier :

1° Le volume compris entre le plan des xy, la surface $z = f(x, y)$, et le cylindre droit qui a pour base la courbe fermée, C, du plan des xy, a pour expression

$$(2) \qquad \int\int_C f(x, y)\, dx\, dy,$$

en supposant que toute parallèle à Oz, ayant son pied à l'intérieur de C, ne rencontre la surface $z = f(x, y)$ qu'en *un* point.

2° Pour un solide se projetant dans la région C du plan des xy, et coupé en *deux* points, de cotes $z_1(x, y)$ et $z_2(x, y)$, par la parallèle à Oz issue de tout point (x, y) de cette région, le volume est

$$(3) \qquad \int\int_C [z_2(x, y) - z_1(x, y)]\, dx\, dy \qquad (z_2 > z_1).$$

Enfin, si l'on peut calculer directement l'*aire*, $\sigma(z)$, que le solide S intercepte sur le plan normal à Oz, de cote z, le volume de ce solide (n° 8) s'exprime encore par l'intégrale simple

$$(4) \qquad \int_a^b \sigma(z)\, dz,$$

a et b désignant le minimum et le maximum de la cote z, sur la surface limite du solide.

Remarque. — Il est clair que le volume du solide S est également donné par l'intégrale triple

$$(5) \qquad \iiint_S dx\, dy\, dz,$$

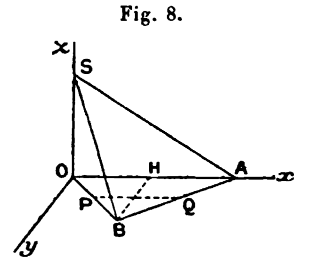
car celle-ci, par définition, est la somme des éléments de volume ΔV_n, intérieurs au solide. Elle se ramène d'ailleurs immédiatement à l'expression (1).

Donnons quelques applications de ces formules.

19. Volume du tétraèdre. — En menant la hauteur SO d'un tétraèdre SABC, on décompose le tétraèdre en trois autres, de sommet S, ayant pour bases respectives les triangles OAB, OAC, OBC. Il suffit donc de savoir calculer le volume d'un tétraèdre, SOAB par exemple, dont une arête est en même temps hauteur.

Le point O étant l'origine (*fig.* 8), OS l'axe des z, OA l'axe

Fig. 8.



des x (axes rectangulaires), et la longueur OA étant prise pour unité de longueur afin de simplifier les formules, posons $OS = c$, et soient

$$my - x = 0, \qquad \mu y - (x - 1) = 0,$$

les équations des droites OB et AB dans le plan des xy.

Le volume du tétraèdre SOAB est donné par l'intégrale double (2)

$$\iint_{OAB} z\, dx\, dy,$$

où z est la cote du point d'abscisse x et d'ordonnée y, dans le plan SAB. Ce plan ayant pour équation

$$x + \frac{z}{c} - \mu y - 1 = 0$$

le volume cherché, V, a pour expression

$$V = \int\int_{OAB} c(1 - x + \mu y)\,dx\,dy,$$

le champ étant l'intérieur du triangle OAB. Pour faire le calcul, écrivons suivant la règle

$$V = c\int dy \int (1 - x + \mu y)\,dx.$$

Les limites de l'intégrale en x sont les valeurs de l'abscisse x qui correspondent aux points P et Q où la parallèle à Ox, d'ordonnée y, coupe le contour du champ ; ce sont donc my et $1 + \mu y$; quant aux limites de l'intégrale en y, ce sont 0 et l'ordonnée du point B, c'est-à-dire $\frac{1}{m - \mu}$. Ainsi

$$V = c\int_0^{\frac{1}{m-\mu}} dy \int_{my}^{1+\mu y} (1 - x + \mu y)\,dx,$$

y étant regardé comme constant dans l'intégrale en x. Effectuons les calculs ; il vient

$$V = c\int_0^{\frac{1}{m-\mu}} dy \left[(1 + \mu y)x - \frac{1}{2}x^2\right]_{my}^{1+\mu y}$$

$$= c\int_0^{\frac{1}{m-\mu}} dy\,\frac{(1 + \mu y - my)^2}{2} = \frac{c}{2}\left[\frac{[1 + (\mu - m)y]^3}{3(\mu - m)}\right]_0^{\frac{1}{m-\mu}} = \frac{c}{6(m - \mu)}.$$

L'aire de la base OAB étant $\frac{1}{2(m - \mu)}$ et la hauteur SO étant c, on retrouve l'expression classique du volume du tétraèdre.

20. Remarque. — On a commencé par l'intégration en x ; on aurait pu commencer par celle en y et écrire

$$V = c\int dx \int (1 - x + \mu y)\,dy.$$

Les limites pour l'intégrale en y sont les ordonnées des points où la parallèle à Oy, d'abscisse x, coupe le contour du champ ; la limite inférieure est 0, mais la limite supérieure est l'y de la droite OB, ou l'y de la droite BA, selon que x est plus petit ou

plus grand que OH, en désignant par H le pied de la hauteur BH. Il faut donc décomposer l'intégrale en deux

$$\iint_{OAB} = \iint_{OBH} + \iint_{HBA},$$

et écrire successivement, puisque OH est égal à $\frac{m}{m-\mu}$,

$$\iint_{OBH} = \int_0^{\frac{m}{m-\mu}} dx \int_0^{\frac{x}{m}} (1 - x + \mu y)\, dy,$$

$$\iint_{HBA} = \int_{\frac{m}{m-\mu}}^{1} dx \int_0^{\frac{x-1}{\mu}} (1 - x + \mu y)\, dy.$$

Les calculs s'achèvent alors sans difficulté.

21. Volume de l'ellipsoïde. — Soit l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0;$$

la section de cette surface par le plan normal à Oz, de cote z, est l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{z^2}{c^2},$$

z étant regardé comme une constante. Les demi-axes de cette ellipse sont

$$a\sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}}, \qquad b\sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}};$$

son aire, $\sigma(z)$, est donc

$$\pi ab\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right).$$

On aura dès lors le volume de l'ellipsoïde par la formule (4) :

$$V = \int_{-c}^{+c} \sigma(z)\, dz = \pi ab \int_{-c}^{+c} \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right) dz = \pi ab\left(2c - \frac{2c^3}{3c^2}\right) = \frac{4}{3}\pi abc.$$

2° *Centres de gravité.*

22. Définition. — On définit les coordonnées ξ, η, ζ du centre

de gravité d'un corps homogène, V, par les formules

$$\xi = \frac{\iiint_V x\,dx\,dy\,dz}{\iiint_V dx\,dy\,dz}, \qquad \eta = \frac{\iiint_V y\,dx\,dy\,dz}{\iiint_V dx\,dy\,dz},$$

$$\zeta = \frac{\iiint_V z\,dx\,dy\,dz}{\iiint_V dx\,dy\,dz},$$

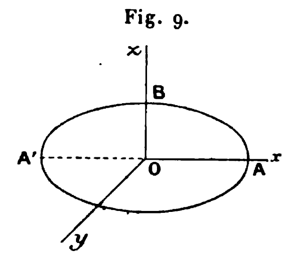
les intégrales triples étant toutes prises à l'intérieur du corps V. D'ailleurs l'intégrale $\iiint_V dx\,dy\,dz$, qui figure au dénominateur, est le volume de ce corps.

23. Exemple. — *Centre de gravité d'un demi-ellipsoïde.* — Considérons (*fig.* 9) l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

proposons-nous de déterminer le centre de gravité de la portion de ce volume située en avant du plan des zx.

Fig. 9.



Par raison de symétrie, le point cherché sera sur l'axe des y; il suffit donc de calculer sa coordonnée η. D'ailleurs le volume du demi-ellipsoïde étant $\frac{2}{3}\pi abc$, on aura

$$\frac{2}{3}\pi abc\eta = \iiint y\,dx\,dy\,dz,$$

l'intégrale ayant pour champ le demi-corps. Écrivons

$$\frac{2}{3}\pi abc\eta = \iint dx\,dz \int y\,dy.$$

Les limites, pour l'intégrale en y, sont o et l'ordonnée du point où la parallèle Oy, d'abscisse x et de cote z, coupe l'ellipsoïde, en avant du plan des zx; l'équation de l'ellipsoïde étant

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

l'ordonnée en question est

$$b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}}.$$

Quant au champ de l'intégrale double en x et z, c'est évidemment, dans le plan des xz, l'intérieur, C, de l'ellipse principale ABA'. Ainsi, en effectuant l'intégration par rapport à y, on a

$$\frac{2}{3}\pi abc\eta=\int\int_C dx\,dz\,\frac{b^2}{2}\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}\right).$$

Calculons l'intégrale double dans C. Les limites pour z, quand x est donné, sont $-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$ et $+c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$; les limites de x sont ensuite $-a$ et $+a$; donc

$$\begin{aligned}\frac{2}{3}\pi abc\eta &= \frac{b^2}{2}\int_{-a}^{+a}dx\int_{-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{+c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}\right)dz\\ &= \frac{b^2}{2}\int_{-a}^{+a}dx\left[2c\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3c^2}2c^3\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}}\right]\\ &= \frac{2}{3}b^2c\int_{-a}^{+a}dx\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}}=\frac{4}{3}b^2c\int_0^a dx\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}}.\end{aligned}$$

On calcule l'intégrale en x par le changement de variable

$$x=a\cos\varphi,\qquad \text{d'où}\qquad \frac{2}{3}\pi a\eta=\frac{4}{3}ba\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\varphi\,d\varphi;$$

d'après le n° 273 du Tome I, l'intégrale simple est égale à $\frac{3}{16}\pi$; donc :

$$\pi\eta=2b\frac{3}{16}\pi;\qquad \text{c'est-à-dire}\qquad \eta=\frac{3}{8}b.$$

24. On définit de même le centre de gravité d'une aire plane, C, par les formules

$$\xi = \frac{\int\int_C x\,dx\,dy}{\int\int_C dx\,dy}, \qquad \eta = \frac{\int\int_C y\,dx\,dy}{\int\int_C dx\,dy},$$

et l'on a ainsi à calculer trois intégrales doubles; celle qui figure en dénominateur est l'aire du champ C.

3° *Moments d'inertie.*

25. Définition. — On nomme *moment d'inertie* d'un élément de volume par rapport à une droite le produit de la masse de l'élément par le carré de sa distance à la droite; le moment d'inertie d'un corps est la somme des moments d'inertie des éléments de volume qui le composent. Si donc V est le corps, si μ est la densité de l'élément dV, r sa distance à la droite, le moment d'inertie du corps V sera

$$I = \int\int\int_V \mu r^2\,dV.$$

Pour un corps homogène, $\mu =$ const.; et tout revient à calculer l'intégrale triple

$$\int\int\int_V r^2\,dV.$$

26. Exemple. — *Moment d'inertie d'un prisme rectangulaire par rapport à un de ses axes.* — Soit le prisme d'arêtes $2a$, $2b$, $2c$, dont le centre est l'origine, et dont les arêtes sont parallèles aux axes. Son moment d'inertie par rapport à Oz est, en faisant $\mu = 1$,

$$I = \int\int\int_P (x^2 + y^2)\,dx\,dy\,dz;$$

et, puisque le champ est un parallélépipède rectangle de faces

parallèles aux plans de coordonnées, on a (remarque du n° 17) :

$$I = \int_{-a}^{+a} dx \int_{-b}^{+b} dy \int_{-c}^{+c} (x^2+y^2)\, dz$$

$$= 2c \int_{-a}^{+a} dx \int_{-b}^{+b} (x^2+y^2)\, dy$$

$$= 2c \int_{-a}^{+a} dx \left(x^2 y + \frac{y^3}{3}\right)_{-b}^{+b} = 4bc \int_{-a}^{+a} \left(x^2 + \frac{b^2}{3}\right) dx = \frac{8}{3} abc(a^2+b^2).$$

IV. — CHANGEMENT DE VARIABLES DANS UNE INTÉGRALE MULTIPLE.

27. Coordonnées polaires. — Nous traiterons le cas de l'intégrale double en considérant d'abord un exemple particulier.

Dans l'intégrale

$$I = \iint f(x, y)\, dx\, dy,$$

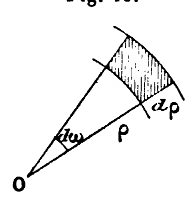
prise dans un champ limité C, on fait le changement de variables

$$x = \rho \cos\omega, \qquad y = \rho \sin\omega,$$

et l'on demande l'expression transformée de I, en ρ et ω.

L'intégrale proposée s'écrit $\iint f(x, y)\, d\sigma$, $d\sigma$ étant l'élément d'aire du plan : or, si l'on divise le champ en éléments, par des

Fig. 10.



circonférences ayant pour centre l'origine et par des rayons issus de ce centre (*fig.* 10), l'aire ombrée, comprise entre les circonférences de rayons ρ et $\rho + d\rho$, et les rayons d'angles polaires ω

et $\omega + d\omega$, a pour expression *rigoureuse* (différence des aires de deux secteurs) :

$$\Delta\sigma = \frac{1}{2}(\rho + d\rho)^2 d\omega - \frac{1}{2}\rho^2 d\omega = \rho\, d\rho\, d\omega + \frac{1}{2} d\rho^2 d\omega.$$

Or l'intégrale I étant, par définition, la limite de la somme

$$\Sigma f(\rho\cos\omega,\ \rho\sin\omega)\,\Delta\sigma,$$

on aura

$$I = \lim\left[\Sigma f(\rho\cos\omega, \rho\sin\omega)\rho\, d\rho\, d\omega + \frac{1}{2}\Sigma f\, d\rho^2 d\omega\right].$$

Dans cette expression, la seconde somme a pour limite zéro quand les $d\rho$ et $d\omega$ tendent vers zéro. En effet, soient M_0 le maximum du module de $f(x, y)$ dans le champ C, et A l'aire du champ (A) en ρ, ω qui correspond à C, c'est-à-dire l'aire de la région d'un plan où reste le point de coordonnées *cartésiennes rectangulaires*, ρ, ω quand le point x, y reste dans C : dès que les $d\rho$ sont inférieurs à ε, le module de la seconde somme est inférieur à

$$\frac{1}{2}M_0\varepsilon\,\Sigma\, d\rho\, d\omega, \quad \text{ou à} \quad \frac{1}{2}M_0\varepsilon A,$$

ce qui démontre la proposition, car le champ A est fini lorsque le champ C l'est lui-même.

Quant à la première somme, elle tend évidemment vers l'intégrale double

$$\iint f(\rho\cos\omega,\ \rho\sin\omega)\rho\, d\rho\, d\omega,$$

prise, en coordonnées cartésiennes rectangulaires, dans le champ (A).

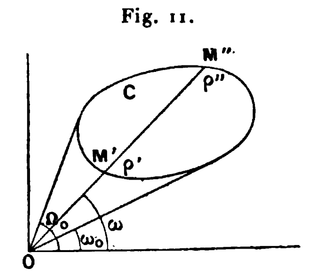
Tel est le résultat demandé : d'ailleurs pour calculer l'intégrale transformée en ρ, ω, il n'est pas nécessaire de passer par l'intermédiaire du champ (A) : grâce à la signification géométrique simple des coordonnées polaires, il est aussi aisé de se servir du champ C. On a en effet, en appliquant la méthode générale de calcul d'une intégrale double,

$$I = \int d\omega \int f.\rho\, d\rho\,;$$

les limites de l'intégrale en ρ sont les valeurs extrêmes que prend

le rayon vecteur lorsque l'angle polaire a la valeur ω; ce sont donc (*fig.* 11), $\rho' = OM'$ et $\rho'' = OM''$; les limites de l'intégrale en ω

Fig. 11.



sont ω_0 et Ω_0, minimum et maximum de l'angle polaire pour tout le champ. Ainsi

$$I = \int_{\omega_0}^{\Omega_0} d\omega \int_{\rho'}^{\rho''} f(\rho \cos\omega, \rho \sin\omega) \rho \, d\rho.$$

28. Remarque. — Cet exemple montre qu'on ne doit pas remplacer dx et dy dans $\int\int f(x, y)\, dx\, dy$ par leurs valeurs obtenues en différentiant les équations $x = \rho \cos\omega$, $y = \rho \sin\omega$, du changement de variables; cette opération, d'ailleurs, conduirait à un résultat sans signification, puisqu'elle introduirait des termes en $d\rho^2$ et $d\omega^2$, et non pas seulement un terme en $d\rho\, d\omega$.

29. Cas général. — Si l'on a à faire le changement de variables général,

$$x = \varphi(u, v), \qquad y = \psi(u, v),$$

on pourra raisonner d'une manière analogue, en divisant le plan à l'aide des courbes $u =$ const. et $v =$ const. : la courbe $u = u_0$ est celle dont on obtient l'équation en faisant $u = u_0$ dans les deux relations précédentes, et éliminant v entre ces relations; on définit de même la courbe $v = v_0$.

Or il est aisé de trouver la valeur principale, $d\sigma$, de l'aire ombrée (*fig.* 12) comprise entre les courbes (u) de paramètres u et $u + du$, et les courbes (v) de paramètres v et $v + dv$: le plan peut être en effet regardé comme une surface définie paramétriquement par

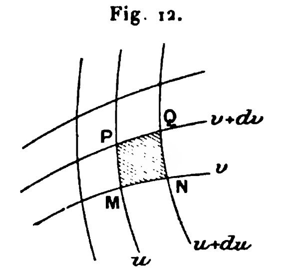
$$x = \varphi(u, v), \qquad y = \psi(u, v), \qquad z = 0;$$

et l'on a trouvé, pour la *valeur principale* cherchée ([1]) (Tome I, n° 418),

$$d\sigma = du\, dv \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Ici $C = \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v} - \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u}$; C est donc le Jacobien, $J(u, v)$, des

Fig. 12.



deux fonctions $\varphi(u, v)$ et $\psi(u, v)$; d'ailleurs $A = B = 0$. On a donc, pour la valeur *exacte* de l'aire considérée,

$$\Delta\sigma = du\, dv[\operatorname{mod} J(u, v) + \varepsilon_{uv}],$$

ε_{uv} désignant une quantité qui s'annule avec du et dv; et de là résulte pour l'intégrale proposée,

$$I = \int\int f(x, y)\, d\sigma,$$

l'expression

$$I = \lim \Sigma f[\varphi(u, v), \psi(u, v)] \operatorname{mod} J\, du\, dv + \lim \Sigma f.\varepsilon_{uv}\, du\, dv.$$

La première somme a pour limite l'intégrale double

$$\int\int f[\varphi(u, v), \psi(u, v)] \operatorname{mod} J(u, v)\, du\, dv,$$

prise dans un champ en u, v facile à déterminer; pour établir que la seconde a pour limite zéro, il faudrait montrer que $\operatorname{mod} \varepsilon_{uv}$ reste, pour toutes les valeurs de u, v comprises dans le champ,

---

([1]) On pourrait opérer autrement en observant que l'aire curviligne MNQP a pour valeur principale le double de l'aire du triangle rectiligne MNP. Or les points M, N, P ont respectivement pour coordonnées (aux infiniment petits près du second ordre) x, y; $x + \frac{\partial x}{\partial u} du$, $y + \frac{\partial y}{\partial u} du$; $x + \frac{\partial x}{\partial v} dv$, $y + \frac{\partial y}{\partial v} dv$; l'aire du triangle est par suite, en vertu de son expression connue par un déterminant, égale à $\frac{1}{2}\, du\, dv \operatorname{mod} J(u, v)$, en valeur principale.

et à partir de valeurs suffisamment petites de du, dv, inférieur à un nombre *donné*, α, si petit soit-il : sans cela, on ne sera pas sûr que la seconde somme tende vers zéro (*voir* un cas analogue au n° 315 du Tome I). La démonstration serait délicate et s'étendrait difficilement d'elle-même au cas de l'intégrale triple; il sera plus simple de suivre une *autre méthode* et de fractionner la question.

30. **Première partie.** — Supposons d'abord qu'on ne change *qu'une seule* des deux variables, y par exemple, en posant

$$y = F(x, u), \tag{1}$$

u étant la nouvelle variable remplaçant y; il s'agit de chercher l'expression, en x et u, de l'intégrale

$$I = \int\int_C f(x, y)\, dx\, dy.$$

On peut admettre, sans restreindre la généralité, que la fonction $\frac{\partial F}{\partial u}$ garde un signe constant dans le champ d'intégration : en effet, $\frac{\partial F}{\partial u}$ est une fonction de x et de u, et, par suite, d'après (1), c'est une fonction de x et de y, soit $\varphi(x, y)$; or, la courbe

$$\varphi(x, y) = 0$$

divise le champ primitivement donné en champs partiels, dans chacun desquels la fonction φ, c'est-à-dire $\frac{\partial F}{\partial u}$, conserve le même signe, et il suffira de supposer d'abord que C est un des champs partiels.

Cela posé, regardons x et y comme les coordonnées rectangulaires d'un point dans un plan P, x et u comme les coordonnées d'un point dans un plan P', et établissons entre les points de P et de P' la correspondance suivante. A un point $M'(x, u)$ de P', faisons correspondre le point M de P, qui a même abscisse, x, et qui a pour ordonnée la quantité y définie par (1), $y = F(x, u)$.

Lorsque le point M (*fig.* 13) reste à l'intérieur du champ C, le point correspondant M' reste à l'intérieur d'un champ C'; il est clair que si M est sur le contour de C, M' est sur le contour de C';

de plus, pour les deux champs C et C′, les abscisses extrêmes x_0 et X_0 sont évidemment les mêmes : on admet essentiellement que la correspondance entre les points des deux champs est *univoque,* c'est-à-dire qu'à un point x, u de C′ ne répond, par (1), qu'un point x, y de C, et inversement.

Cela posé, on peut écrire l'intégrale I :

$$(2)\qquad I = \int_{x_0}^{X_0} dx \int_{y_1}^{y_2} f(x, y)\, dy \qquad (y_1 < y_2),$$

y_1 et y_2 étant les valeurs de y qui correspondent, sur le contour du champ C, à la valeur x de l'abscisse.

Fig. 13 et 14.

Or, dans l'intégrale $\int_{y_1}^{y_2} f(x, y)\, dy$, x est regardé comme constant; si donc on pose $y = F(x, u)$, on aura $dy = \frac{\partial F}{\partial u} du$, et, par suite,

$$(3)\qquad \int_{y_1}^{y_2} f(x, y)\, dy = \int_{u_1}^{u_2} f(x, F) \frac{\partial F}{\partial u} du,$$

u_1 et u_2 étant les valeurs de u qui répondent par $y = F(x, u)$, aux valeurs y_1 et y_2 de y; ce sont, en d'autres termes, les u des points du plan P′ qui correspondent aux points (x, y_1) et (x, y_2) du plan P.

Soient U_1 la plus petite, U_2 la plus grande des quantités u_1, u_2;

je dis que l'on a

$$(4)\qquad \int_{u_1}^{u_2} f(x, \mathrm{F}) \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial u} du = \int_{\mathrm{U}_1}^{\mathrm{U}_2} f(x, \mathrm{F}) \bmod \left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial u}\right) du.$$

Car la relation

$$dy = \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial u} du$$

montre que, si $\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial u}$ est positif dans le champ, u croît en même temps que y (x étant constant), et, comme on a $y_1 < y_2$, on aura

$$u_1 < u_2,$$

c'est-à-dire que

$$u_1 = \mathrm{U}_1, \qquad u_2 = \mathrm{U}_2,$$

et la relation (4) est évidente. De même, si $\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial u}$ est négatif dans le champ, u décroît quand y croît (x étant constant), et, comme on a $y_1 < y_2$, on aura

$$u_1 > u_2,$$

d'où

$$u_1 = \mathrm{U}_2, \qquad u_2 = \mathrm{U}_1,$$

et la relation (4) est encore évidente.

Donc enfin, en vertu de (2), (3) et (4), il vient

$$(5)\qquad \mathrm{I} = \int_{x_0}^{\mathrm{X}_0} dx \int_{\mathrm{U}_1}^{\mathrm{U}_2} f(x, \mathrm{F}) \bmod \left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial u}\right) du.$$

Si maintenant on se reporte à la figure 14, on voit que le second membre de (5) n'est autre chose, d'après sa forme même, que l'intégrale double

$$\iint_{\mathrm{C}'} f(x, \mathrm{F}) \bmod \left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial u}\right) dx\, du$$

prise dans le champ C'; car, pour calculer cette intégrale, la règle générale conduit précisément à écrire le second membre de (5).

On a ainsi résolu le problème, c'est-à-dire trouvé la forme de l'intégrale donnée en introduisant les variables x et u : observons maintenant que $\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial u}$ n'est autre chose que le *jacobien* des anciennes variables, x et y, par rapport aux nouvelles, x et u. Les formules

de transformation

$$x = x, \qquad y = F(x, u)$$

donnent en effet

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(x, u)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial u} \end{vmatrix} = \frac{\partial F}{\partial u}.$$

La formule finale est donc

$$(6) \qquad \int\int_C f(x, y)\, dx\, dy = \int\int_{C'} f(x, F) \bmod \frac{\partial(x, y)}{\partial(x, u)}\, dx\, du.$$

Remarque. — Cette formule est indépendante du signe constant que $\frac{\partial F}{\partial u}$ a été censé garder dans le champ C; on en conclut qu'elle est vraie même si $\frac{\partial F}{\partial u}$ change de signe dans le champ.

En effet, supposons que, dans la partie C_1 du champ, $\frac{\partial F}{\partial u}$ soit positif, et que, dans la partie C_2, il soit négatif. La formule (6) étant vraie pour les champs C_1 et C_2, on a

$$\int\int_{C_1} f(x, y)\, dx\, dy = \int\int_{C'_1} f(x, F) \bmod J\, dx\, du,$$

$$\int\int_{C_2} f(x, y)\, dx\, dy = \int\int_{C'_2} f(x, F) \bmod J\, dx\, du;$$

d'où l'on tire, en ajoutant membre à membre,

$$\int\int_{C} f(x, y)\, dx\, dy = \int\int_{C'} f(x, F) \bmod J\, dx\, du,$$

C' étant le champ total, $C'_1 + C'_2$, en x et u, qui répond au champ C en x et y. C. Q. F. D.

31. **Seconde partie.** — Changeons maintenant *les deux* variables x et y; soient u et v les nouvelles variables.

Si nous prenons d'abord pour variables, à la place de x et y, les variables x et u, nous aurons, comme on vient de le voir,

$$\int\int_C f(x, y)\, dx\, dy = \int\int_{C'} f(x, y) \bmod \frac{\partial(x, y)}{\partial(x, u)}\, dx\, du,$$

y étant remplacé, dans la seconde intégrale, par sa valeur en x et u,

et C′ étant le champ des systèmes de valeurs de x, u qui correspondent aux valeurs x, y du champ C.

Prenons maintenant comme variables, à la place de x et de u, les variables u et v; nous aurons, toujours d'après (6),

$$\iint_{C'} f(x, y) \bmod \frac{\partial(x, y)}{\partial(x, u)} dx\, du$$
$$= \iint_{C''} f(x, y) \bmod \frac{\partial(x, y)}{\partial(x, u)} \bmod \frac{\partial(x, u)}{\partial(u, v)} du\, dv,$$

C″ étant le champ des systèmes de valeurs de u, v qui correspondent aux valeurs x, u du champ C′, c'est-à-dire aux valeurs x, y du champ C.

Or, d'après une propriété fondamentale des jacobiens (T. I, n° 49), on a

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(x, u)} \frac{\partial(x, u)}{\partial(u, v)} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)},$$

ce qui donne finalement

$$\iint_{C} f(x, y)\, dx\, dy = \iint_{C''} f(x, y) \bmod \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} du\, dv,$$

x et y étant, au second membre, supposés remplacés par leurs valeurs en u et v : c'est le résultat trouvé, moins rigoureusement, au n° 29.

Voici donc la conclusion.

32. Règle. — *Pour changer de variables dans une intégrale double*

$$\iint_{C} f(x, y)\, dx\, dy,$$

on substitue à x et y, dans $f(x, y)$, leurs valeurs en fonction des variables nouvelles u et v, et l'on remplace $dx\,dy$ par mod J *$du\,dv$*, J *étant le jacobien de x et y par rapport à u et v.*

Le champ de l'intégrale nouvelle est l'ensemble des systèmes de valeurs de u, v qui correspondent aux systèmes de valeurs de x, y compris dans le champ primitif C.

Ainsi, le champ C étant défini par une ou plusieurs inégalités

$$\varphi_1(x, y) > 0, \qquad \varphi_2(x, y) > 0, \qquad \ldots,$$

le champ nouveau sera défini par les mêmes inégalités, où l'on suppose x et y remplacés par leurs valeurs en u et v.

33. Remarque. — Les démonstrations précédentes supposent qu'à un point (x, y) du champ primitif C correspond un et un seul point du champ nouveau en u, v, et inversement. S'il en est autrement, on décomposera le champ primitif en champs partiels, de manière à vérifier la condition indiquée.

Par exemple, si C est l'intérieur du cercle $x^2 + y^2 - R^2 = 0$, et si l'on pose

$$x^2 = u, \qquad y^2 = v,$$

on décomposera le cercle en quatre quadrants, par les axes de coordonnées; à un point (u, v) correspond alors, dans chaque quadrant, un seul point x, y, et réciproquement.

L'intégrale double donnée sera ainsi la somme de quatre autres, à chacune desquelles on appliquera séparément la règle du changement de variables.

34. Intégrale triple. — La règle est la même pour une intégrale triple; on remplace $dx\,dy\,dz$ par $du\,dv\,dw \bmod J$, J étant le jacobien de x, y, z par rapport à u, v, w. La démonstration est semblable à celle qui précède.

Applications.

35. Coordonnées polaires. — Si l'on pose

$$x = \rho \cos\omega, \qquad y = \rho \sin\omega,$$

on trouve

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(\rho, \omega)} = \rho,$$

et, comme ρ est essentiellement positif, $dx\,dy$ doit être remplacé par $\rho\,d\rho\,d\omega$, ainsi qu'on l'a trouvé au n° 27.

Comme application, cherchons le *centre de gravité du demi-cercle* C, de rayon R, tangent à l'origine à l'axe des y (*fig.* 15). Ce point est évidemment sur la parallèle à Oy menée par le centre D; il suffit donc de calculer son ordonnée η.

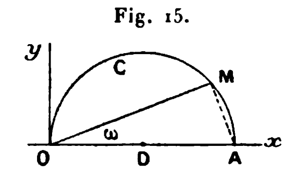
On aura (n° 24)

$$\eta = \frac{\int\int_C y\,dx\,dy}{\int\int_C dx\,dy} = \frac{2\int\int_C y\,dx\,dy}{\pi R^2},$$

car l'aire du demi-cercle, qui est le dénominateur de η, est $\frac{1}{2}\pi R^2$.

Transformons l'intégrale du numérateur en coordonnées po-

Fig. 15.



laires; il vient

$$\frac{1}{2}\pi R^2 \eta = \int\int \rho^2 \sin\omega\, d\rho\, d\omega.$$

Commençons à intégrer par rapport à ρ, en écrivant

$$\frac{1}{2}\pi R^2 \eta = \int \sin\omega\, d\omega \int \rho^2\, d\rho.$$

Les limites de l'intégrale en ρ sont o et OM, valeurs de ρ qui correspondent à l'angle polaire ω sur le contour du champ; les limites de l'intégrale en ω sont o et $\frac{\pi}{2}$, valeurs extrêmes de l'angle polaire sur le contour (n° 27); et, comme $OM = 2R\cos\omega$, il vient

$$\frac{1}{2}\pi R^2 \eta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\omega\, d\omega \int_0^{2R\cos\omega} \rho^2\, d\rho = \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 8R^3 \cos^3\omega \sin\omega\, d\omega,$$

$$\frac{3}{16}\pi\frac{\eta}{R} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\omega \sin\omega\, d\omega = -\left(\frac{\cos^4\omega}{4}\right)_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4},$$

d'où, finalement,

$$\eta = \frac{4}{3}\frac{R}{\pi}.$$

36. Remarque. — Si le champ C est la région comprise entre

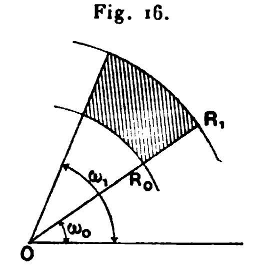
les deux cercles de rayons R_0 et R_1 qui ont l'origine pour centre, et entre les deux rayons vecteurs d'angles polaires ω_0 et ω_1 (*fig.* 16), on a

$$\int\int_C f(\rho, \omega)\, d\rho\, d\omega = \int_{\omega_0}^{\omega_1} d\omega \int_{R_0}^{R_1} f(\rho, \omega),$$

les limites étant des constantes absolues.

Car les valeurs de ρ qui correspondent, sur le contour du champ,

Fig. 16.



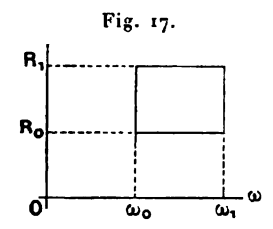
à l'angle polaire ω, sont R_0 et R_1; les valeurs extrêmes de ω sur le contour sont ω_0 et ω_1.

On peut dire aussi que le champ est défini par les inégalités

$$\omega_0 \leqq \omega \leqq \omega_1, \qquad R_0 \leqq \rho \leqq R_1,$$

c'est-à-dire que, si ω et ρ sont regardées comme les coordonnées *rectangulaires* d'un point d'un plan, le champ est l'intérieur d'un *rectangle* de côtés parallèles aux axes (*fig.* 17). Donc (n° 15)

Fig. 17.



les limites sont R_0 et R_1 pour l'intégrale en ρ, ω_0 et ω_1 pour l'intégrale en ω.

Les coordonnées polaires seront donc très avantageuses quand on aura à calculer des intégrales doubles dans des champs limités par des cercles concentriques et des rayons issus de leur centre commun.

37. Volumes et aires planes en coordonnées curvilignes. — Soit la surface définie paramétriquement par

$$x = x(u, v), \qquad y = y(u, v), \qquad z = z(u, v).$$

Le *volume* compris entre cette surface, le plan des xy et un cylindre droit ayant pour base, dans ce plan, une courbe C, est, comme on sait (n° 18),

$$V = \int\int_C z\,dx\,dy;$$

si l'on remplace dans l'intégrale x, y et z par leurs valeurs paramétriques en u et v, celle-ci devient

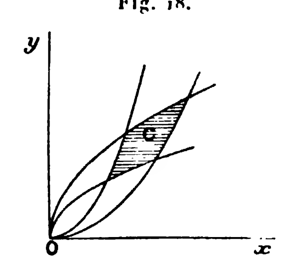
$$V = \int\int z(u, v) \bmod \left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right) du\,dv,$$

le champ, en u, v, étant déterminé comme on l'a expliqué au n° 32.

Faisons, dans ces formules, $z = 1$; elles donneront l'*aire* de la portion du plan des xy comprise à l'intérieur du champ C.

Exemple. — On demande la valeur de l'aire ombrée C

Fig. 18.



(*fig.* 18), comprise entre les quatre paraboles

$$y^2 = a_0 x, \qquad y^2 = a_1 x, \qquad x^2 = b_0 y, \qquad x^2 = b_1 y,$$

en supposant $a_1 > a_0 > 0$, $b_1 > b_0 > 0$.

Dans l'intégrale qui donne l'aire, à savoir $\int\int_C dx\,dy$, faisons le changement de variables

$$\frac{y^2}{x} = u, \qquad \frac{x^2}{y} = v.$$

On en tire

$$y = u^{\frac{2}{3}} v^{\frac{1}{3}}, \qquad x = u^{\frac{1}{3}} v^{\frac{2}{3}};$$

d'où, pour le jacobien,

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = -\frac{1}{3}.$$

L'intégrale proposée devient donc

$$\frac{1}{3}\iint du\, dv;$$

d'ailleurs, le champ ancien, en x et y, étant défini par les inégalités

$$a_0 \leqq \frac{y^2}{x} \leqq a_1, \qquad b_0 \leqq \frac{x^2}{y} \leqq b_1,$$

le champ nouveau, en u et v, sera défini par

$$a_0 \leqq u \leqq a_1, \qquad b_0 \leqq v \leqq b_1;$$

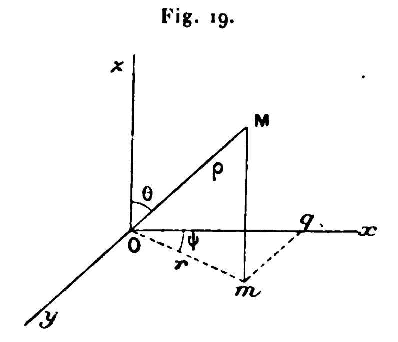
ce sera donc l'intérieur d'un rectangle, et l'on aura, pour l'aire cherchée,

$$\frac{1}{3}\int_{a_0}^{a_1} du \int_{b_0}^{b_1} dv = \frac{1}{3}(a_1 - a_0)(b_1 - b_0).$$

38. Élément de volume en coordonnées polaires et semi-polaires.

1° Les coordonnées polaires d'un point M de l'espace (*fig.* 19)

Fig. 19.



(Tome I, n° 285) sont les quantités ρ, θ et ψ de la figure : si x, y, z sont les coordonnées cartésiennes rectangulaires de ce

point, on a

$$x = Oq = Om\cos\psi = \rho\sin\theta\cos\psi,$$
$$y = mq = Om\sin\psi = \rho\sin\theta\sin\psi,$$
$$z = Mm \qquad\qquad = \rho\cos\theta.$$

Il importe d'observer que, quelle que soit la position de M dans l'espace, on peut supposer ρ positif, θ compris entre o et π, ψ compris entre o et 2π. Réciproquement à un système de valeurs de ρ, θ, ψ satisfaisant à ces conditions correspond un et un seul point (x, y, z) de l'espace.

Les formules de transformation ci-dessus donnent :

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \psi)} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\psi & \rho\cos\theta\cos\psi & -\rho\sin\theta\sin\psi \\ \sin\theta\sin\psi & \rho\cos\theta\sin\psi & \rho\sin\theta\cos\psi \\ \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = \rho^2\sin\theta.$$

Ainsi, dans une intégrale triple, l'élément de volume $dx\,dy\,dz$ sera remplacé par $\rho^2\sin\theta\,d\rho\,d\theta\,d\psi$; il n'y a pas à introduire le module du jacobien, puisque ρ^2 et $\sin\theta$ sont positifs.

2° Les coordonnées *semi-polaires* de M sont $Om = r$, ψ et z; on a les formules de transformation

$$x = r\cos\psi, \qquad y = r\sin\psi, \qquad z = z.$$

On peut supposer r positif et ψ compris entre o et 2π.

Le jacobien $\dfrac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \psi, z)}$ est égal à r : l'élément de volume sera donc $r\,dr\,d\psi\,dz$, puisque r est positif.

Voici quelques applications.

39. Volume d'une portion de sphère. — Considérons un corps V limité (*fig.* 20) :

1° Par deux sphères, ayant l'origine pour centre, de rayons ρ_0 et ρ_1;

2° Par deux demi-cônes de révolution autour de Oz, d'angles au sommet $2\theta_0$ et $2\theta_1$;

3° Par deux demi-plans menés par Oz, et faisant avec zOx les angles ψ_0 et ψ_1.

L'emploi des coordonnées polaires est très avantageux dans

toutes les intégrales triples étendues au corps V. En effet, pour un point quelconque (ρ, θ, ψ) de ce champ, on a

$$\rho_0 \leqq \rho \leqq \rho_1, \qquad \theta_0 \leqq \theta \leqq \theta_1, \qquad \psi_0 \leqq \psi \leqq \psi_1,$$

et réciproquement, si ρ, θ, ψ vérifient ces inégalités, le point (ρ, θ, ψ) est à l'intérieur de V.

Si donc on transforme en coordonnées polaires une intégrale

$$\mathrm{I} = \int\int\int_{\mathrm{V}} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz,$$

ayant V pour champ, le nouveau champ, en regardant ρ, θ et ψ

Fig. 20.

comme les coordonnées rectangulaires d'un point, sera un *parallélépipède* rectangle de faces parallèles aux plans de coordonnées. On aura donc (n° **17**)

$$\int\int\int_{\mathrm{V}} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$
$$= \int_{\rho_0}^{\rho_1} d\rho \int_{\theta_0}^{\theta_1} d\theta \int_{\psi_0}^{\psi_1} d\psi\, \rho^2 \sin\theta\, f(\rho \sin\theta \cos\psi, \rho \sin\theta \sin\psi, \rho \cos\theta)$$
$$= \int_{\rho_0}^{\rho_1} \rho^2\, d\rho \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sin\theta\, d\theta \int_{\psi_0}^{\psi_1} f\, d\psi.$$

Ainsi, le volume du corps V s'obtiendra en faisant $f = 1$; d'où

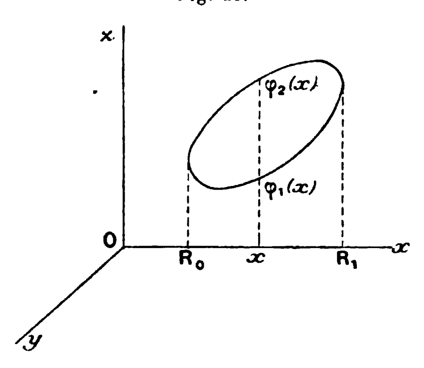
$$\mathrm{V} = \frac{\rho_1^3 - \rho_0^3}{3} (\cos\theta_0 - \cos\theta_1)(\psi_1 - \psi_0).$$

40. Moment d'inertie d'un volume de révolution par rapport à son axe. — Les coordonnées semi-polaires sont avantageuses dans les questions relatives aux surfaces de révolution autour de Oz.

Considérons, par exemple, le volume de révolution V engendré par une courbe fermée du plan des xz, tournant autour de Oz.

Soit $z = \varphi(x)$ cette courbe (*fig.* 21), supposée rencontrée en

Fig. 21.



deux points, au plus, par toute parallèle à Oz : désignons par $\varphi_1(x)$ et $\varphi_2(x)$ les deux valeurs de z qui correspondent, sur la courbe, à l'abscisse x, $\varphi_1(x)$ étant inférieur à $\varphi_2(x)$.

Le *moment d'inertie* (n° 25) du volume V, par rapport à Oz, est, en coordonnées semi-polaires,

$$I = \iiint_V (x^2 + y^2)\, dx\, dy\, dz = \iiint r^3\, dr\, d\psi\, dz.$$

Écrivons

$$I = \iint r^3\, dr\, d\psi \int dz,$$

les limites de l'intégrale en z sont les valeurs de z qui correspondent, *sur la surface* de révolution, aux valeurs r et ψ des deux autres coordonnées, c'est-à-dire, puisque $z = \varphi(r)$ est l'équation de la surface,

$$I = \iint r^3 [\varphi_2(r) - \varphi_1(r)]\, dr\, d\psi,$$

et le champ de cette intégrale double est l'ensemble des valeurs de r, ψ qui correspondent aux points du volume de révolution.

En d'autres termes, ce champ est la région du plan des xy où se projettent les points du volume, c'est-à-dire la *couronne circulaire* comprise entre deux circonférences de centre O et de rayons R_0 et R_1, R_0 et R_1 désignant le minimum et le maximum de la distance d'un point de la courbe méridienne à l'axe Oz. Par suite (n° 36) l'intégrale double s'écrit

$$I = \int_{R_0}^{R_1} r^3[\varphi_2(r) - \varphi_1(r)]\,dr \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi \int_{R_0}^{R_1} r^3[\varphi_2(r) - \varphi_1(r)]\,dr.$$

41. Exemples. — 1° *Sphère.* — La méridienne est

$$z = \pm\sqrt{R^2 - x^2},$$

d'où

$$\varphi_2(x) = +\sqrt{R^2 - x^2}, \qquad \varphi_1(x) = -\sqrt{R^2 - x^2}$$

et

$$I = 2\pi \int_0^R 2r^3\sqrt{R^2 - r^2}\,dr.$$

Pour intégrer, on prendra pour variable r^2, puisque l'on n'a, sous le signe $\int$, que $r\,dr$ et r^2; mieux encore, on posera

$$R^2 - r^2 = t^2;$$

d'où

$$I = 4\pi \int_0^R (R^2 - t^2)t^2\,dt = \frac{8}{15}\pi R^5.$$

2° *Cylindre.* — On a évidemment, en désignant par h la hauteur du cylindre, par R son rayon et en supposant la base dans le plan des xy,

$$\varphi_2(x) = h, \qquad \varphi_1(x) = 0;$$

donc

$$I = 2\pi \int_0^R hr^3\,dr = \frac{1}{2}\pi h R^4.$$

3° *Tore.* — La méridienne est (*fig.* 22)

$$(x-a)^2 + z^2 = R^2, \qquad z = \pm\sqrt{R^2 - (x-a)^2},$$

d'où

$$\varphi_2(x) = +\sqrt{R^2 - (x-a)^2}, \qquad \varphi_1(x) = -\sqrt{R^2 - (x-a)^2}.$$

On a donc

$$I = 2\pi \int_{a-R}^{a+R} 2r^3\sqrt{R^2-(r-a)^2}\,dr.$$

Pour intégrer, on peut ramener aux lignes trigonométriques en posant

$$r - a = R\sin\varphi;$$

ce qui donne

$$I = 4\pi R^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} (a + R\sin\varphi)^3 \cos^2\varphi\,d\varphi;$$

ou, en développant,

$$\frac{1}{4\pi R^2} I = a^3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi\,d\varphi + 3a^2 R \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\cos^2\varphi\,d\varphi$$

$$+ 3aR^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi\cos^2\varphi\,d\varphi + R^3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \sin^3\varphi\cos^2\varphi\,d\varphi.$$

Au second membre, la deuxième et quatrième intégrales sont

Fig. 22.

nulles, car ce sont des intégrales de fonctions impaires, entre des limites égales et de signes contraires (Tome I, n° 263, 4°).

On a d'ailleurs, en se servant des formules établies à propos de celle de Wallis (Tome I, n° 273),

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi\,d\varphi = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2\varphi)\,d\varphi = 2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\,\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2},$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi\cos^2\varphi\,d\varphi = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi(1-\sin^2\varphi)\,d\varphi = 2\left(\frac{1}{2}\,\frac{\pi}{2} - \frac{1.3}{2.4}\,\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{8}.$$

Finalement

$$I = 4\pi R^2\left(\frac{\pi}{2}a^3 + \frac{3}{8}\pi a R^2\right) = \frac{\pi^2 a R^2}{2}(4a^2 + 3R^2).$$

V. — AIRES SUR LES SURFACES.

42. Définition. — Soit Σ une surface, pour laquelle les coordonnées d'un point par rapport à trois axes rectangulaires, Ox, Oy, Oz, sont des fonctions de deux paramètres, u et v, et sur laquelle le carré de l'élément d'arc a pour expression (Tome I, n° 412)

$$(1) \qquad ds^2 = E(u, v)\,du^2 + 2F(u, v)\,du\,dv + G(u, v)\,dv^2.$$

Considérons une portion finie, A, de Σ; les valeurs de u, v qui répondent aux points de cette portion vérifient certaines inégalités, et réciproquement; sous une autre forme, si l'on regarde u, v comme les coordonnées rectangulaires d'un point dans un plan, aux points de la portion de surface A correspondent les points d'une région, C, de ce plan. Nous supposerons que la correspondance ainsi établie entre la surface A et la région C est *univoque*, le mot ayant la signification donnée au n° 30.

Cela posé, nous définirons l'aire, $\mathcal{A}$, de la portion de surface A par la relation

$$(2) \qquad \mathcal{A} = \int\int_C \sqrt{EG - F^2}\,du\,dv,$$

l'intégrale double étant prise dans la région C du plan des uv.

Cette définition est indépendante du choix des axes de coordonnées, Ox, Oy et Oz, parce que, si l'on fait un changement d'axes rectangulaires, en gardant toujours les mêmes paramètres u et v, l'expression (1) de ds^2 demeure évidemment inaltérée, en raison de sa signification géométrique.

Je dis maintenant que la définition est indépendante du choix des paramètres u et v. Faisons en effet le changement de

variables

(3) $$u = f(u', v'), \qquad v = g(u', v'),$$

l'expression de ds^2 devient

$$ds^2 = \mathrm{E}(f, g)\left(\frac{\partial f}{\partial u'}du' + \frac{\partial f}{\partial v'}dv'\right)^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots,$$

ce qui s'écrit

(4) $$ds^2 = \mathrm{E}_1\, du'^2 + 2\mathrm{F}_1\, du'\, dv' + \mathrm{G}_1\, dv'^2,$$

étant posé

(5) $$\begin{cases} \mathrm{E}_1 = \mathrm{E}\left(\dfrac{\partial f}{\partial u'}\right)^2 + 2\mathrm{F}\dfrac{\partial f}{\partial u'}\dfrac{\partial g}{\partial u'} + \mathrm{G}\left(\dfrac{\partial g}{\partial u'}\right)^2, \\ \mathrm{F}_1 = \mathrm{E}\dfrac{\partial f}{\partial u'}\dfrac{\partial f}{\partial v'} + \mathrm{F}\left(\dfrac{\partial f}{\partial u'}\dfrac{\partial g}{\partial v'} + \dfrac{\partial f}{\partial v'}\dfrac{\partial g}{\partial u'}\right) + \mathrm{G}\dfrac{\partial g}{\partial u'}\dfrac{\partial g}{\partial v'}, \\ \mathrm{G}_1 = \mathrm{E}\left(\dfrac{\partial f}{\partial v'}\right)^2 + 2\mathrm{F}\dfrac{\partial f}{\partial v'}\dfrac{\partial g}{\partial v'} + \mathrm{G}\left(\dfrac{\partial f}{\partial v'}\right)^2 : \end{cases}$$

dans les seconds membres, E, F, G désignent

$$\mathrm{E}[f(u', v'), g(u', v')], \quad \mathrm{F}[f(u', v'), g(u', v')], \quad \mathrm{G}[f(u', v'), g(u', v')].$$

Dans le système des paramètres u', v', l'aire, $\mathcal{A}_1$, de la portion de surface considérée est définie, d'après (4), par la relation

(6) $$\mathcal{A}_1 = \iint_{C_1} \sqrt{\mathrm{E}_1\mathrm{G}_1 - \mathrm{F}_1^2}\, du'\, dv',$$

C_1 étant la région du plan des u', v' qui répond à la portion de surface, c'est-à-dire qui répond, par les formules de transformation (3), à la région C du plan des uv. Il s'agit d'établir que $\mathcal{A}_1$ est égal à $\mathcal{A}$.

Or, si, dans l'intégrale double (2), qui donne $\mathcal{A}$, on effectue le changement de variables (3),

$$u = f(u', v'), \qquad v = g(u', v'),$$

cette intégrale devient

$$\mathcal{A} = \iint_{C_1} \sqrt{\mathrm{E}(f, g)\,\mathrm{G}(f, g) - \mathrm{F}^2(f, g)}\, \mathrm{mod}\, \frac{\partial(u, v)}{\partial(u', v')}\, du'\, dv',$$

C_1 étant le champ du plan des u', v' défini tout à l'heure.

D'ailleurs, des relations (5), on déduit, par un calcul facile, l'identité suivante :

$$E_1 G_1 - F_1^2 = (EG - F^2)\left(\frac{\partial f}{\partial u'}\frac{\partial g}{\partial v'} - \frac{\partial f}{\partial v'}\frac{\partial g}{\partial u'}\right)^2,$$

c'est-à-dire

$$\sqrt{EG - F^2} \bmod \frac{\partial(u, v)}{\partial(u', v')} = \sqrt{E_1 G_1 - F_1^2},$$

E, F, G désignant encore

$$E(f, g), \quad F(f, g), \quad G(f, g).$$

L'expression ci-dessus de $\mathcal{A}$ s'écrit donc :

$$\mathcal{A} = \int\int_{C_1} \sqrt{E_1 G_1 - F_1^2}\, du'\, dv', \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \mathcal{A} = \mathcal{A}_1.$$

C. Q. F. D.

43. Cas particuliers. — Pour une surface représentée par $z = f(x, y)$, on a (Tome I, n° **414**)

$$(7) \qquad ds^2 = (1 + p^2)\, dx^2 + 2pq\, dx\, dy + (1 + q^2)\, dy^2,$$

p et q désignant $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$. L'aire de la portion de surface qui se projette à l'intérieur de la région C du plan des xy, et qui n'est coupée qu'en *un* point par toute parallèle à Oz ayant son pied dans cette région [1], est donc, d'après (7) et (2) :

$$(8) \qquad \mathcal{A} = \int\int_C \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dx\, dy.$$

On aurait des expressions analogues en résolvant l'équation de la surface par rapport à y ou à x.

Si la surface est le plan $z = 0$, p et q sont nuls, et l'on retrouve, pour $\mathcal{A}$, l'expression ordinaire de l'aire, $\int\int_C dx\, dy$.

44. Remarque I. — La quantité $\sqrt{EG - F^2}\, du\, dv$, qui figure sous le double signe sommatoire dans l'expression de $\mathcal{A}$, n'est

[1] Car il est nécessaire que la portion de surface et le champ C se correspondent d'une manière univoque.

autre chose que la valeur principale de l'élément d'aire sur la surface proposée, en coordonnées curvilignes (Tome I, n° **418**). Mais il eût été difficile de partir de cette expression pour définir l'aire d'une région finie de la surface, parce qu'elle ne donne qu'une valeur principale, c'est-à-dire *approchée*, dont on ne peut fixer aisément le degré d'approximation.

L'expression (2) de l'aire, ne dépendant que de E, F, G, est la même pour deux surfaces applicables l'une sur l'autre (Tome I, n° **455**), c'est-à-dire que la représentation d'une surface sur une autre, quand elle conserve les longueurs, conserve aussi les aires.

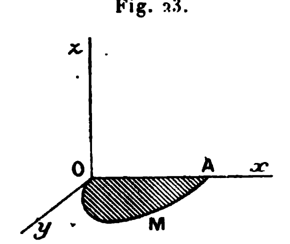
Remarque II. — On a trouvé (Tome I, n° **418**)

$$EG - F^2 = A^2 + B^2 + C^2,$$

A, B, C étant les coefficients de l'équation du plan tangent (Tome I, n° **408**). On pourra donc remplacer $EG - F^2$ par cette valeur, dans (2).

45. Exemple I. — Soit la sphère $x^2+y^2+z^2=R^2$, de centre O, rencontrant en A (*fig.* 23) la partie positive de l'axe des x. On

Fig. 23.



considère, dans le plan des xy, une ellipse intérieure à la sphère, d'axe Ox, de sommets O et A, d'équation $y^2 = m^2x(R-x)$: on demande l'aire de la portion de sphère située au-dessus du plan des xy, qui se projette à l'intérieur de la demi-ellipse OMA.

En dérivant par rapport à x et y l'équation $x^2+y^2+z^2=R^2$, on obtient les valeurs de $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$, ou p et q :

$$x + pz = 0, \qquad y + qz = 0.$$

L'aire cherchée, $\mathcal{A}$, est donc, d'après (8),

$$\mathcal{A} = \int\int_{OMA} dx\, dy \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{z^2}}$$
$$= \int\int dx\, dy \frac{R}{z} = \int\int dx\, dy \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}},$$

en vertu de l'équation de la sphère.

Calculons $\mathcal{A}$ en commençant l'intégration par rapport à y; les limites, dans l'intégrale en y, sont o et l'ordonnée, pour l'abscisse x, de l'ellipse $y^2 = m^2 x(R - x)$; dans l'intégrale en x, les limites sont o et R. On a donc

$$\mathcal{A} = R \int_0^R dx \int_0^{m\sqrt{x(R-x)}} \frac{dy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}.$$

L'intégrale indéfinie $\int \frac{dy}{\sqrt{a^2 - y^2}}$ étant $\operatorname{Arc\,sin} \frac{y}{a}$, il vient

$$\mathcal{A} = R \int_0^R \operatorname{Arc\,sin} \frac{m\sqrt{x(R-x)}}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx = R \int_0^R \operatorname{Arc\,sin} m \sqrt{\frac{x}{R + x}} dx.$$

Calculons l'intégrale en x par le changement de variable

$$\operatorname{Arc\,sin} m \sqrt{\frac{x}{R + x}} = t, \qquad \text{ou} \qquad \frac{m^2 x}{R + x} = \sin^2 t;$$

d'où

$$x = \frac{R \sin^2 t}{m^2 - \sin^2 t}, \qquad dx = 2 \frac{R m^2 \cos t \sin t}{(m^2 - \sin^2 t)^2} dt,$$

et

$$\mathcal{A} = R^2 \int_0^{\operatorname{Arc\,sin} \frac{m}{\sqrt{2}}} m^2 t . 2 \frac{\cos t \sin t}{(m^2 - \sin^2 t)^2} dt.$$

La quantité $2 \frac{\cos t \sin t\, dt}{(m^2 - \sin^2 t)^2}$ étant la différentielle de $\frac{1}{m^2 - \sin^2 t}$, on trouve, en intégrant par parties,

$$\mathcal{A} = R^2 m^2 \left(\frac{t}{m^2 - \sin^2 t} \right)_0^{\operatorname{Arc\,sin} \frac{m}{\sqrt{2}}} - R^2 m^2 \int_0^{\operatorname{Arc\,sin} \frac{m}{\sqrt{2}}} \frac{dt}{m^2 - \sin^2 t}.$$

L'intégrale restante se calcule aisément par le changement de variable $\operatorname{tang} t = u$ (Tome I, n° 230, 1°).

Dans le cas particulier de $m = 1$, l'ellipse devient une circonférence; l'intégrale indéfinie au second membre est tang t, et, comme $\operatorname{Arc}\sin \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$, on trouve

$$\mathcal{A} = R^2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right).$$

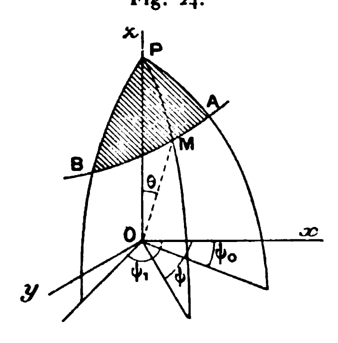
Sous une autre forme, si, du huitième de sphère compris dans l'angle positif des axes, on retranche la partie qui se projette à l'intérieur du demi-cercle décrit sur OA comme diamètre dans le plan des xy, l'aire de la portion restante est $\frac{1}{2}\pi R^2 - \mathcal{A}$, c'est-à-dire R^2. Elle est donc exactement quarrable; c'est le problème dit de la *voûte de Viviani*.

46. Exemple II. — Soit la sphère représentée paramétriquement, en coordonnées polaires, par les équations (Tome I, n° **416**)

$$x = R \sin\theta \cos\psi,$$
$$y = R \sin\theta \sin\psi,$$
$$z = R \cos\theta;$$

on demande l'aire (ombrée) (*fig.* 24) comprise sur cette surface

Fig. 24.



entre les méridiens $\psi = \psi_0$, $\psi = \psi_1$, et l'arc AB de la *loxodromie* (Tome I, n° **467**) définie par l'équation

$$\operatorname{tang}\frac{\theta}{2} = \lambda e^{a\psi}.$$

On a trouvé sur la sphère (Tome I, n° **416**)

$$ds^2 = R^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\psi^2);$$

d'où

$$\mathcal{A} = \iint R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\psi.$$

Écrivons

$$\mathcal{A} = R^2 \int d\psi \int \sin\theta \, d\theta.$$

Les limites de l'intégrale en θ sont les valeurs de θ qui correspondent, sur le contour du champ, à la valeur ψ de l'autre coordonnée, c'est-à-dire les θ des points P et M où le méridien ψ coupe ce contour. La limite inférieure est donc o (point P); la limite supérieure (point M) est la valeur, θ, que fournit, en fonction de ψ, l'équation de la courbe, c'est-à-dire

$$\operatorname{tang}\frac{\theta}{2} = \lambda e^{a\psi},$$

$$\theta = 2 \operatorname{arc\,tang} \lambda e^{a\psi}.$$

Ainsi

$$\mathcal{A} = R^2 \int_{\psi_0}^{\psi_1} d\psi \int_0^{\theta} \sin\theta \, d\theta = R^2 \int_{\psi_0}^{\psi_1} d\psi (-\cos\theta)_0^{2 \operatorname{arc\,tang} \lambda e^{a\psi}},$$

c'est-à-dire, en utilisant la formule qui donne $\cos 2u$ en fonction de $\operatorname{tang} u$,

$$\mathcal{A} = R^2 \int_{\psi_0}^{\psi_1} d\psi \left(1 - \frac{1 - \lambda^2 e^{2a\psi}}{1 + \lambda^2 e^{2a\psi}}\right) = \frac{R^2}{a} \int_{\psi_0}^{\psi_1} \frac{2a\lambda^2 e^{2a\psi}}{1 + \lambda^2 e^{2a\psi}} d\psi;$$

et finalement, puisque, sous le signe $\int$, le numérateur est la dérivée du dénominateur,

$$\mathcal{A} = \frac{R^2}{a} \log \frac{1 + \lambda^2 e^{2a\psi_1}}{1 + \lambda^2 e^{2a\psi_0}}.$$

47. **Remarque.** — On peut parfois évaluer une aire par une seule quadrature; un premier exemple en a été donné au Tome I à propos de l'aire des surfaces de révolution : en voici un second.

Soit le cylindre de révolution (la méthode s'appliquerait à un cylindre quelconque)

$$x^2 + y^2 = R^2;$$

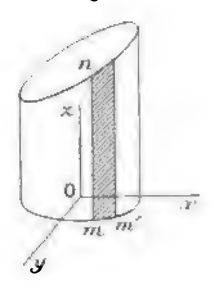
on demande l'aire comprise sur cette surface (*fig.* 25), entre le

plan des xy et le plan

$$z = ax + b.$$

Sur la circonférence de base dans le plan des xy, marquons deux points voisins, m et m', de coordonnées x, y et $x + dx, y + dy$: les génératrices qui passent par ces points découpent, sur l'aire à évaluer, une surface (ombrée) infiniment petite. La valeur principale, $d\sigma$, de cette surface est évidemment l'aire d'un rectangle

Fig. 25.



qui aurait pour base l'arc de cercle mm', et pour hauteur mn, c'est-à-dire $ax + b$; on a donc, en remplaçant mm' par la différentielle de l'arc

$$d\sigma = dx\sqrt{1 + y'^2}(ax + b).$$

Or l'équation $x^2 + y^2 = R^2$ donne

$$x + yy' = 0,$$

d'où y', et

$$d\sigma = dx\sqrt{1 + \frac{x^2}{y^2}}(ax + b) = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}(ax + b)\,dx.$$

La moitié de la surface totale cherchée s'obtiendra évidemment par l'intégrale simple

$$R\int_{-R}^{+R} \frac{ax + b}{\sqrt{R^2 - x^2}}\,dx,$$

qui se calcule très aisément.

VI. — EXTENSION DE LA NOTION D'INTÉGRALE DOUBLE ET TRIPLE.

48. Définitions. — Cherchons d'abord à étendre la notion d'intégrale multiple au cas d'un *champ infini*, ou d'une *fonction à intégrer discontinue*.

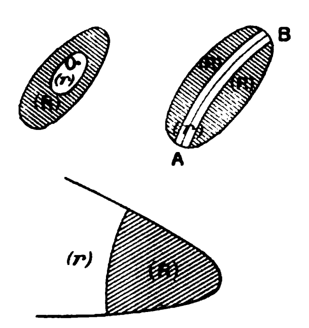
Soit, par exemple, une intégrale double

$$\int\int_C f(x, y)\, d\sigma,$$

prise dans un champ C. Si la fonction $f(x, y)$ devient discontinue en un point du champ $\left(\text{exemple } \frac{1}{x^2+y^2}\right)$ ou le long d'une ligne $\left(\text{exemple } \frac{1}{x-y}\right)$, on partagera le champ C en deux régions, R et r, dont l'une, r, enveloppe le point ou la ligne de discontinuité.

Dans les figures ci-dessous (*fig.* 26), O et AB sont le point et

Fig. 26.



la ligne de discontinuité, R est la région ombrée, r la région non ombrée.

De même, si le champ d'intégration est infini, on le décomposera en deux régions, l'une, R, finie, l'autre, r, s'étendant à l'infini.

Cela posé, l'intégrale

$$\int\int_R f(x, y)\, d\sigma$$

aura une valeur finie et déterminée, puisque $f(x, y)$ est continue dans R, et que R est fini; on appellera *valeur de l'intégrale double,* dans le champ C primitif, la limite vers laquelle tend $\int\int_R f(x, y)\, d\sigma$ lorsqu'on fait décroître indéfiniment l'étendue de la région r (cas de la discontinuité) ou croître indéfiniment l'étendue de R aux dépens de r (cas du champ infini).

Cette définition *suppose essentiellement* que $\int\int_R$ tend vers une limite finie, déterminée, indépendante de la forme de la région r.

49. L'extension précédente est une généralisation directe de celle qui s'est présentée dans la théorie des intégrales simples; il y a toutefois, entre les deux cas, une différence importante.

Plaçons-nous, pour fixer les idées, dans l'hypothèse d'un champ infini. L'intégrale simple

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$$

est la limite de l'expression $\int_a^p f(x)\, dx$, pour p *croissant* indéfiniment; dans cette dernière expression, à mesure que p augmente, les éléments $f(x)\, dx$ se présentent *dans un ordre déterminé,* qui est celui des valeurs successives et croissantes de x. Au contraire, dans l'intégrale double $\int\int_R f(x, y)\, d\sigma$, dont le champ R augmente indéfiniment, rien ne fixe *a priori* l'ordre dans lequel se présentent les éléments $f(x, y)\, d\sigma$; cet ordre dépend de la manière dont on fait croître R aux dépens de r. De là résulte une profonde dissemblance.

En effet, dans le cas de l'intégrale simple, les éléments positifs et négatifs de l'intégrale $\int f(x)\, dx$ peuvent avoir séparément des sommes infinies, leur différence restant néanmoins finie (Tome I, n° 301), à cause de l'ordre bien déterminé dans lequel se succèdent ces éléments dans la somme totale. Il en est tout autrement dans le cas de l'intégrale double : faisons croître R; la somme des éléments positifs de l'intégrale augmente avec R et

tend par suite vers une limite finie ou infinie L_1, indépendante de la manière dont R croît aux dépens de r (¹); de même la somme des éléments négatifs a une limite finie ou infinie $-L_2$. La condition nécessaire et suffisante pour que l'intégrale double ait une valeur finie, déterminée, et indépendante de la forme de la région r, est que les limites L_1 et L_2 soient *séparément* finies : car si elles étaient toutes deux infinies, la différence $L_1 - L_2$ serait indéterminée, puisque l'ordre dans lequel se succèdent, dans l'intégrale totale, les éléments positifs et négatifs, est tout à fait arbitraire. Si, au contraire, L_1 et L_2 sont finis, l'intégrale double aura pour limite $L_1 - L_2$, quelle que soit la forme de la région r.

Des considérations identiques s'appliquent au cas de la discontinuité de la fonction.

Ainsi, pour que l'intégrale $\int\int_R f(x, y)\, d\sigma$ ait une limite finie et déterminée, il faut et il suffit que les éléments positifs et négatifs de l'intégrale aient séparément des sommes finies, condition équivalente à la suivante :

L'intégrale

$$\int\int_R [\operatorname{mod} f(x, y)]\, d\sigma$$

doit avoir une limite finie.

50. Il n'y a pas de règle générale permettant de reconnaître si l'intégrale $\int\int_R [\operatorname{mod} f(x, y)]\, d\sigma$ a (ou non) une limite finie; comme dans la théorie des intégrales simples, on doit se borner à des règles particulières dont voici les plus intéressantes.

51. **Champ infini**. — Supposons que, pour tous les points x, y, extérieurs à un cercle fixe C_0, de rayon ρ_0, on ait

$$\operatorname{mod} f(x, y) \leqq \frac{A}{\rho^\alpha},$$

ρ étant la distance du point x, y au centre du cercle C_0, A une

(¹) Car une somme de termes de même signe est indépendante de l'ordre de ces termes.

constante, α un exposant *supérieur* à 2. Je dis que, dans ces conditions, l'intégrale

$$\iint [\operatorname{mod} f(x,y)]\, d\sigma$$

est finie dans un champ infini quelconque.

En effet, dans la partie du champ intérieure au cercle C_0, l'intégrale ci-dessus a une valeur finie, si, bien entendu, $f(x,y)$ est une fonction continue dans le champ donné ; quant à sa valeur dans la partie du champ extérieure au cercle C_0, on l'augmente en prenant pour champ *toute* la région du plan extérieure à ce cercle, car tous les éléments de l'intégrale sont positifs. Or, dans ce nouveau champ, on a, d'après l'hypothèse,

$$\iint [\operatorname{mod} f(x,y)]\, d\sigma \leqq \iint \frac{A}{\rho^\alpha}\rho\, d\rho\, d\omega,$$

en remplaçant l'élément d'aire, $d\sigma$, par $\rho\, d\rho\, d\omega$, en coordonnées polaires (n° 27). Dans l'intégrale double du second membre, les limites sont ρ_0 et ∞ pour ρ, 0 et 2π pour ω (n° 36) ; elle s'écrit donc

$$A\int_0^\infty \frac{\rho\, d\rho}{\rho^\alpha}\int_0^{2\pi} d\omega, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad -\frac{2\pi A}{\alpha-2}\left(\frac{1}{\rho^{\alpha-2}}\right)_{\rho_0}^{\infty},$$

expression qui se réduit à $\frac{2\pi A}{\alpha-2}\rho_0^{\alpha-2}$, puisque $\alpha > 2$. Cette quantité étant finie, l'intégrale double primitive est elle-même finie.

C. Q. F. D.

52. Fonction discontinue en un point. — Supposons que $f(x,y)$ soit infinie en un point O, mais de telle sorte que, dans l'intérieur du cercle C_0, de rayon ρ_0, ayant ce point pour centre, on ait

$$\operatorname{mod} f(x,y) \leqq \frac{A}{\rho^\alpha},$$

ρ étant la distance du point x, y au point O, A une constante, α un exposant *inférieur* à 2. Je dis encore que, dans ces conditions, l'intégrale

$$\iint [\operatorname{mod} f(x,y)]\, d\sigma$$

est finie dans un champ fini quelconque, entourant le point O.

Il suffit en effet de le démontrer en prenant pour champ *tout* l'intérieur du cercle C_0. Or on a, d'après l'hypothèse,

$$\iint_{C_0} [\operatorname{mod} f(x, y)]\, d\sigma < \iint_{C_0} \frac{A}{\rho^\alpha} \rho\, d\rho\, d\omega,$$

et l'intégrale du second membre s'écrit

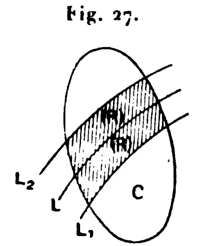
$$A \int_0^{\rho_0} \frac{\rho\, d\rho}{\rho^\alpha} \int_0^{2\pi} d\omega, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad -\frac{2\pi A}{\alpha - 2} \left(\frac{1}{\rho^{\alpha-2}}\right)_0^{\rho_0};$$

elle est donc finie et égale à $\frac{2\pi A}{2-\alpha} \rho_0^{2-\alpha}$, puisque α est inférieur à 2. Il en résulte que l'intégrale double primitive est elle-même finie.

C. Q. F. D.

53. Fonction discontinue le long d'une ligne. — Supposons que $f(x, y)$ soit infinie le long d'une ligne L (*fig.* 27), mais de

Fig. 27.



telle sorte que, dans une zone R, limitée par deux lignes L_1 et L_2, parallèles à la ligne L et comprenant celle-ci, on ait

$$\operatorname{mod} f(x, y) < \frac{A}{l^\alpha},$$

l étant la distance du point xy à la ligne L, A une constante, α un exposant *inférieur* à l'unité. On peut établir assez aisément que l'intégrale $\iint [\operatorname{mod} f(x, y)]\, d\sigma$ est finie dans un champ fini quelconque, traversé ou bordé par la ligne L.

Pour simplifier, on ne donnera cette démonstration que dans le cas où la ligne L est une droite, qu'on peut toujours supposer coïncider avec l'axe des x.

Il suffit évidemment d'établir la proposition en prenant pour

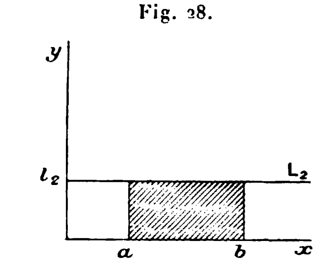
champ la région (ombrée) limitée par l'axe des x, l'une des lignes L_2 ou L_1 (*fig.* 28), qui sont ici des droites parallèles à Ox, et par deux parallèles quelconques à Oy, situées à distance finie.

Soient

$$y = l_2, \quad y = 0,$$
$$x = a, \quad x = b$$

les équations des quatre droites limitant le champ; on a dans ce

Fig. 28.



champ, en vertu de l'hypothèse,

$$\iint [\operatorname{mod} f(x, y)]\, d\sigma \leq \iint \frac{A}{y^\alpha}\, dx\, dy.$$

L'intégrale du second membre s'écrit

$$A \int_0^{l_2} \frac{dy}{y^\alpha} \int_a^b dx, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \frac{-A(b-a)}{\alpha - 1}\left(\frac{1}{y^{\alpha-1}}\right)_0^{l_2},$$

quantité finie, puisque $\alpha < 1$; ce qui démontre la proposition.

Exemples.

54. **Triangle.** — Désignons par P, Q, R trois fonctions linéaires de x, y; l'intégrale

$$\iint \frac{d\sigma}{P^\alpha Q^\beta R^\gamma},$$

prise à l'intérieur du triangle formé par les trois droites $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$, est finie et déterminée si $\alpha < 1$, $\beta < 1$, $\gamma < 1$.

Soit en effet ABC le triangle considéré (*fig.* 29); retranchons-en, aux angles, les trois petits parallélogrammes ombrés : il s'agit

d'établir que l'intégrale

$$I = \int\int \frac{d\sigma}{\operatorname{mod} P^\alpha Q^\beta R^\gamma},$$

prise : 1° dans la région restante non ombrée; 2° dans chacun des parallélogrammes ombrés, est finie.

Or, au voisinage du côté ab, dans la région non ombrée, Q et R ne s'annulent pas, de sorte que, le long de ab et au voisinage de ce côté, $\operatorname{mod} \frac{1}{Q^\beta R^\gamma}$ est inférieur à une quantité finie; donc, en vertu d'une proposition précédente (n° 53), puisque α est plus petit que l'unité, la discontinuité de la fonction $\frac{1}{P^\alpha Q^\beta R^\gamma}$, due à l'évanouissement de P le long de ab, n'empêche pas l'intégrale I

Fig. 29.

d'être finie. Les exposants β et γ étant de même inférieurs à l'unité, l'intégrale I est finie dans le champ non ombré intérieur au triangle ABC.

Reste à prendre cette intégrale dans les trois parallélogrammes ombrés. Soit par exemple celui, π, qui a pour sommet B : si l'on prend pour axes de coordonnées les droites $P = 0$, $Q = 0$ qui se coupent en B, en désignant leur angle par θ, on a, pour l'élément d'aire,

$$d\sigma = dX\, dY \sin\theta;$$

d'ailleurs $P(x, y)$ est proportionnel à X, $Q(x, y)$ à Y, et, dans le parallélogramme π, R ne s'annule pas, de sorte que $\operatorname{mod} \frac{1}{R^\gamma}$ reste inférieur à une limite finie. Donc

$$\int\int_\pi \frac{d\sigma}{\operatorname{mod} P^\alpha Q^\beta R^\gamma} \leq M \int\int_\pi \frac{dX\, dY}{X^\alpha Y^\beta}.$$

L'intégrale, au second membre, s'écrit

$$M\int_0^c \frac{dX}{X^\alpha}\int_0^b \frac{dY}{Y^\beta} = \frac{1}{(\alpha-1)(\beta-1)}\left(\frac{1}{X^{\alpha-1}}\right)_0^c\left(\frac{1}{Y^{\beta-1}}\right)_0^b,$$

c et b désignant les longueurs des côtés du parallélogramme π : cette expression est finie, puisque l'on a

$$\alpha < 1, \qquad \beta < 1;$$

l'intégrale I est donc finie dans π. Elle est de même finie dans les deux autres parallélogrammes, ce qui établit le théorème.

On a une proposition semblable pour l'intégrale

$$\int\int \frac{f(x,y)\,d\sigma}{P^\alpha Q^\beta R^\gamma},$$

prise dans le même triangle, pourvu que $f(x, y)$ reste inférieure en valeur absolue, dans ce triangle, à une quantité finie.

55. **Intégrale de Cayley**. — Donnons, d'après Cayley, un exemple d'intégrale double, prise dans un champ infini, et dont la valeur dépend de la forme de la région R : cette intégrale sera nécessairement formée d'éléments positifs et négatifs, de sommes séparément infinies (n° 49).

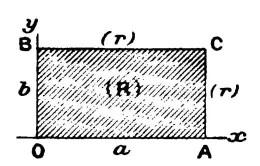
Soit l'intégrale

$$I = \int\int \sin(x^2+y^2)\,d\sigma,$$

étendue à l'angle indéfini xOy.

Pour la calculer, prenons d'abord pour champ R un rec-

Fig. 30.



tangle OACB (*fig.* 30), de côtés a et b, que nous ferons ensuite croître indéfiniment.

L'intégrale s'écrit

$$I = \int\int_R (\sin x^2 \cos y^2 + \cos x^2 \sin y^2)\, dx\, dy$$

$$= \int_0^a \sin x^2\, dx \int_0^b \cos y^2\, dy + \int_0^a \cos x^2\, dx \int_0^b \sin y^2\, dy.$$

Les intégrales (dites de Fresnel)

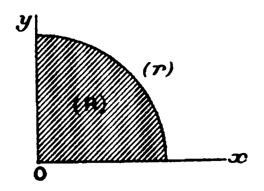
$$\int_0^\infty \sin x^2\, dx \quad \text{et} \quad \int_0^\infty \cos x^2\, dx$$

sont finies et égales à $\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$, comme on le verra plus tard ; on a donc, en faisant croître indéfiniment a et b,

$$I = 2\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{\pi}{4}.$$

Évaluons autrement I, en prenant pour champ R un quart de

Fig. 31.



cercle de centre O et de rayon p que nous ferons ensuite croître sans limite (*fig.* 31). On a, en coordonnées polaires,

$$I = \int\int_R (\sin \rho^2) \rho\, d\rho\, d\omega,$$

c'est-à-dire

$$I = \int_0^p (\sin \rho^2) \rho\, d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\omega = \frac{\pi}{2}\left(\frac{-\cos \rho^2}{2}\right)_0^p = \frac{\pi}{4}(1 - \cos p^2),$$

expression qui n'a pas de limite déterminée pour p infini.

56. Intégrales multiples en général. — Nous n'avons parlé jusqu'ici que d'intégrales doubles et triples ; la généralisation

s'impose d'elle-même. Ainsi l'intégrale quadruple

$$I = \int\int\int\int f(x, y, z, t)\, dx\, dy\, dz\, dt,$$

étendue à toutes les valeurs de x, y, z, t qui vérifient une ou plusieurs inégalités,

$$\varphi_1(x, y, z, t) > 0, \qquad \varphi_2 > 0, \qquad \ldots,$$

sera finie et déterminée si, pour l'ensemble de ces valeurs, $f(x, y, z, t)$ est continue et si aucune de ces valeurs n'est infinie.

Le calcul de l'intégrale I se ramènera à celui d'une intégrale triple; si par exemple on a, pour définir le champ, la seule inégalité

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 - R^2 < 0,$$

on aura

$$I = \int\int\int_V dx\, dy\, dz \left[\int_{t_1}^{t_2} f(x, y, z, t)\, dt \right],$$

x, y, z étant regardés comme constants dans l'intégrale $\int_{t_1}^{t_2}$ et t_1, t_2 étant les valeurs que donne pour t, en fonction de x, y, z, l'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 - R^2 = 0.$$

Quant au champ, V, de l'intégrale triple, il comprendra l'ensemble des valeurs de x, y, z, telles qu'il leur corresponde, par l'équation précédente, une valeur de t réelle; ce sera donc l'intérieur de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$.

57. La théorie du changement de variables dans les intégrales doubles et triples s'étend sans difficulté aux intégrales multiples d'ordre quelconque : on remplace $dx\, dy\, dz\, dt$ par

$$\mathrm{mod}\, J\, du\, dv\, dw\, d\theta,$$

en désignant par J le jacobien des anciennes variables x, y, z, t, par rapport aux nouvelles, u, v, w, θ.

58. **Dérivation sous les signes $\int\int, \int\int\int, \ldots$** — On établit,

comme dans le cas de l'intégrale simple, les formules

$$\frac{d}{d\alpha}\int\int_C f(x, y, \alpha)\, d\sigma = \int\int_C f'_\alpha(x, y, \alpha)\, d\sigma,$$

$$\frac{d}{d\alpha}\int\int\int_V f(x, y, z, \alpha)\, dV = \int\int\int_V f'_\alpha(x, y, z, \alpha)\, dV,$$

pourvu que les *champs d'intégration,* c'est-à-dire l'aire plane C et le volume V, soient indépendants du paramètre α. Ces formules donnent lieu à des observations semblables à celles que l'on a présentées en parlant de la règle de Leibniz (Tome I, n° 322).

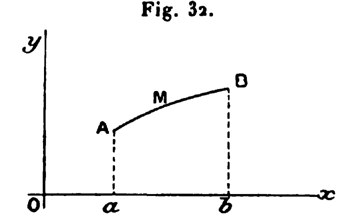
CHAPITRE II.

INTÉGRALES DE LIGNES ET DE SURFACES.

I. — GÉNÉRALITÉS.

59. **Intégrale curviligne.** — Soit y une fonction bien définie et continue de x, $y = \varphi(x)$; désignons par $f(x, y)$ une fonction continue et déterminée de x et y : il est clair que $f[x, \varphi(x)]$ est une fonction continue de la variable x. Dès lors, l'intégrale $\int_a^b f(x, y)\,dx$ est une intégrale ordinaire, par rapport à la variable de sommation x. On dit que c'est une *intégrale curviligne :* pour la déterminer en effet, il faut se donner, non seulement la fonction $f(x, y)$, mais la courbe $y = \varphi(x)$. Figurons

Fig. 32.



cette courbe (*fig.* 32); l'intégrale curviligne ci-dessus se représente souvent par le symbole

$$\int_{AMB} f(x, y)\,dx, \tag{1}$$

AMB désignant l'arc de la courbe $y = \varphi(x)$ sur lequel reste le point x, y, entre les limites d'intégration.

Au lieu de x, on peut prendre y comme variable de sommation, et l'on définit de même

$$\int_{AM} \psi(x, y)\,dy.$$

Enfin, on peut considérer des intégrales curvilignes de la forme

$$(2)\qquad \int_{AMB} [f(x, y)\,dx + \psi(x, y)\,dy].$$

Il est clair que l'on a

$$\int_{AMB} = -\int_{BMA},$$

BMA étant l'arc AMB décrit en sens inverse; car dx et dy changent de signe quand on change le sens du parcours de l'arc.

De même, si M est sur l'arc entre A et B, on a évidemment

$$\int_{AB} = \int_{AM} + \int_{MB}.$$

60. Remarque. — D'après cette définition, l'intégrale

$$\int_{AMB} f(x, y)\,dx$$

est la limite de la somme

$$\Sigma(x_{n+1} - x_n)\,f(\xi_n, \eta_n),$$

où l'on désigne par $a, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots, b$ les abscisses de points $A, m_1, m_2, \ldots, m_n, \ldots, B$, marqués arbitrairement sur l'arc AMB,

Fig. 33.

en allant de A vers B, et que l'on multiplie de manière que leurs intervalles successifs tendent vers zéro; par ξ_n, η_n les coordonnées d'un point quelconque compris sur l'arc entre m_n et m_{n+1}.

On définirait d'une manière semblable l'intégrale

$$\int [f(x, y, z)\,dx + \psi(x, y, z)\,dy + \chi(x, y, z)\,dz],$$

prise le long d'un arc de courbe gauche $y = \varphi_1(x)$, $z = \varphi_2(x)$.

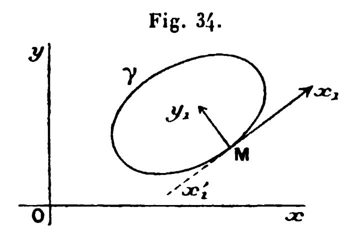
Extension. — L'intégrale curviligne (1) peut être prise le long d'un arc AMB admettant une tangente parallèle à Oy, en C (*fig.* 33); seulement y ne désignera pas la même fonction de x sur l'arc AC et sur l'arc CB : si par exemple ACB est un arc d'ellipse, la fonction y, sur l'arc AC, correspondra à un certain signe d'un radical, et au signe contraire sur l'arc CB.

Une remarque analogue s'applique à l'intégrale (2).

61. Contours fermés. — D'après cela, on comprend que l'arc d'intégration puisse être un contour, c'est-à-dire une ligne fermée, et cela sans que l'intégrale soit nulle; les intégrales de cette nature jouent un rôle fondamental en Analyse, ainsi qu'on le verra dans la seconde Partie du Cours; avant d'indiquer une de leurs plus importantes propriétés, présentons à leur sujet quelques observations.

Sens positif sur un contour. — Si, en un point M d'un contour (γ) (*fig.* 34), on trace la demi-normale, My_1, dirigée vers

Fig. 34.



l'intérieur de l'aire enveloppée par le contour, et si l'on mène la tangente Mx_1, dans un sens tel que l'angle x_1My_1 présente la même disposition que l'angle xOy, on dit que le sens Mx_1, de M vers x_1, définit le sens positif, au point M, sur le contour (γ). Le sens inverse, Mx'_1, est le sens négatif.

Intégrale suivant un contour. — La valeur d'une intégrale curviligne, prise le long d'un contour fermé, en partant d'un point initial et en y revenant, est indépendante du choix de ce point, et ne dépend que du sens de circulation : on suppose, bien entendu, remplies les conditions de continuité indiquées plus haut.

En effet, décrivons le contour (γ) (*fig.* 35), en partant du point A, dans le sens positif; soit B un autre point du contour.

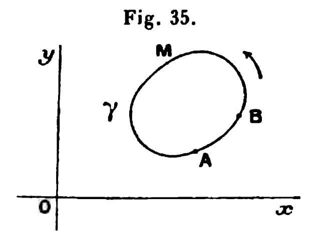
On a

$$\int_{\text{ABMA}} f(x,y)\,dx = \int_{\text{AB}} + \int_{\text{BMA}},$$

$$\int_{\text{BMAB}} f(x,y)\,dx = \int_{\text{BMA}} + \int_{\text{AB}},$$

ce qui démontre le théorème; car, dans les deux seconds membres, y et x ont les mêmes valeurs sur les arcs AB et BMA, ainsi que la

Fig. 35.



fonction $f(x, y)$, puisque celle-ci est une fonction *bien déterminée* de x et y. Si le sens de circulation change sur le contour, l'intégrale change évidemment de signe (n° 59).

62. Intégrale de surface. — Soit une portion limitée, Ω, d'une surface, $z = \varphi(x, y)$, la fonction $\varphi(x, y)$ étant supposée déterminée et continue dans la région, C, du plan des xy où se projettent les points de Ω; désignons par $f(x, y, z)$ une fonction déterminée et continue de x, y, z : il est clair que $f[x, y, \varphi(x, y)]$ sera une fonction déterminée et continue de x, y, dans la région C.

Cela posé, décomposons la surface Ω en éléments d'aire, $\Delta\omega_1, \Delta\omega_2, \ldots, \Delta\omega_n, \ldots$; désignons par ξ_n, η_n, ζ_n les coordonnées d'un point quelconque de la surface compris dans l'aire $\Delta\omega_n$, et considérons la somme

$$\Sigma f(\xi_n, \eta_n, \zeta_n)\,\Delta\omega_n, \tag{3}$$

étendue à tous les éléments d'aire : je dis qu'elle tend vers une limite finie et déterminée quand les dimensions de ces éléments tendent vers zéro dans tous les sens.

On a en effet rigoureusement, en désignant par $\Delta\sigma_n$ l'aire de la région du plan des xy où se projettent les points de l'aire $\Delta\omega_n$ (n° 43) :

$$\Delta\omega_n = \int\int_{\Delta\sigma_n} \sqrt{1 + p^2 + q^2}\,dx\,dy,$$

p et q désignant $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ et $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$. On déduit, par le théorème de la moyenne (n° 7),

$$\Delta\omega_n = \Delta\sigma_n\sqrt{1+p^2(x_n, y_n)+q^2(x_n, y_n)},$$

x_n, y_n désignant les coordonnées d'un point de l'aire $\Delta\sigma_n$, et la somme (3) considérée s'écrit

$$\Sigma f[\xi_n, \eta_n, \varphi(\xi_n, \eta_n)]\sqrt{1+p^2(x_n, y_n)+q^2(x_n, y_n)}\,\Delta\sigma_n;$$

elle est maintenant étendue à tous les éléments $\Delta\sigma_n$ de l'aire C, dans le plan des xy; ξ_n, η_n et x_n, y_n sont les coordonnées de deux points appartenant à l'élément $\Delta\sigma_n$. On en conclut sans difficulté, comme au n° 7, que cette somme a pour limite l'intégrale double

$$(4)\qquad \int\int_C f[x, y, \varphi(x, y)]\sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy,$$

ce qui établit la proposition.

On a supposé que la portion de surface Ω n'est coupée qu'en un point par toute parallèle à Oz ayant son pied dans la région C : s'il en est autrement on divisera Ω en parties jouissant de cette propriété, et l'intégrale pour Ω sera la somme des intégrales pour les parties composantes.

La limite de la somme (3) se nomme *intégrale de surface* et se représente par le symbole

$$\int\int_\Omega f(x, y, z)\,d\omega,$$

z étant supposé remplacé par sa valeur en x, y déduite de l'équation de la surface considérée.

On la calculera à l'aide de son expression (4), ou d'expressions analogues en coordonnées curvilignes, que l'on obtiendrait de la même manière. D'ailleurs dans (4), la quantité $\sqrt{1+p^2+q^2}$ est égale à $|\cos\gamma|$, $|\cos\gamma|$ désignant la valeur absolue du cosinus de l'angle γ que fait, avec Oz, la normale au point x, y, z de la surface Ω; on a donc

$$(5)\qquad \int\int_\Omega f(x, y, z)\,d\omega = \int\int_C f(x, y, z)\frac{dx\,dy}{|\cos\gamma|},$$

II. — FORMULES DIVERSES.

63. On va établir maintenant quelques formules, relatives à des transformations d'intégrales de lignes et de surfaces, et qui ont une grande importance en Analyse ou en Physique; ce sont la formule de Riemann, celles d'Ostrogradsky et de Stokes.

64. Formule de Riemann. — Soient $M(x, y)$ et $N(x, y)$ deux fonctions de deux variables indépendantes x, y; considérons l'intégrale double

$$\int\int\left(-\frac{\partial M}{\partial y}+\frac{\partial N}{\partial x}\right)dx\,dy,$$

prise à l'intérieur d'une aire C, dans laquelle on suppose $\frac{\partial M}{\partial y}$ et $\frac{\partial N}{\partial x}$ bien déterminées et continues.

On a d'abord, en calculant l'intégrale double comme d'ordinaire,

$$-\int\int_C \frac{\partial M}{\partial y}\,dx\,dy = -\int_{x_0}^{X_0} dx\left(\int_{y_1}^{y_2}\frac{\partial M}{\partial y}\,dy\right)$$
$$= -\int_{x_0}^{X_0} dx\,[M(x, y_2) - M(x, y_1)].$$

L'intégrale simple à laquelle se ramène ainsi l'intégrale double

Fig. 36.

considérée est la somme de deux *intégrales curvilignes* (n° 59), à savoir (*fig.* 36)

$$-\int_{AQB} M(x, y)\,dx \quad \text{et} \quad +\int_{APB} M(x, y)\,dx;$$

or,

$$-\int_{AQB} = \int_{BQA},$$

et par suite

$$-\int\int_C \frac{\partial M}{\partial y}\,dx\,dy = \int_{BQAPB} M(x, y)\,dx.$$

L'intégrale du second membre est une intégrale curviligne, prise le long du contour γ, qui limite le champ C, ce contour étant décrit dans le sens positif. De même

$$\int\int_C \frac{\partial N}{\partial x}\,dx\,dy = \int_{y_0}^{Y_0} dy \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial N}{\partial x}\,dx$$

$$= \int_{y_0}^{Y_0} dy\,[N(x_2, y) - N(x_1, y)] = \int_\gamma N(x, y)\,dy,$$

le contour γ étant encore décrit dans le sens positif.

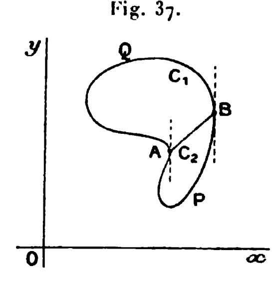
On obtient ainsi la *formule de Riemann* (*ou de Green*) :

$$\int\int_C \left(-\frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial x}\right) dx\,dy = \int_\gamma (M\,dx + N\,dy),$$

qui transforme une intégrale curviligne en intégrale double, et inversement.

65. On a implicitement admis, dans la démonstration, que le

Fig. 37.



contour γ n'est coupé qu'en deux points, au plus, par toute parallèle aux axes Ox et Oy. Dans le cas d'une courbe, comme celle de la figure ci-dessus (*fig.* 37), coupée en plus de deux points par des parallèles à Oy, on divise le champ C en champs partiels C_1, C_2, ... jouissant de la propriété énoncée. Ici, il suffit de tracer la droite AB qui joint les points de contact de deux

tangentes parallèles à Oy, et l'on a, par ce qui précède,

$$\iint_{C_1}\left(-\frac{\partial M}{\partial y}+\frac{\partial N}{\partial x}\right)dx\,dy=\int_{ABQA}(M\,dx+N\,dy),$$

$$\iint_{C_2}\left(-\frac{\partial M}{\partial y}+\frac{\partial N}{\partial x}\right)dx\,dy=\int_{APBA}(M\,dx+N\,dy),$$

d'où, en ajoutant,

$$\iint_{C}=\int_{APBA+ABQA}=\int_{\gamma},$$

car les intégrales $\int_{BA}$ et $\int_{AB}$ se détruisent (n° 59). La formule est donc vraie pour un contour quelconque.

Corollaire I. — On déduira plus tard, de la formule de Riemann, le théorème fondamental de Cauchy sur les intégrales des fonctions d'une variable imaginaire; deux autres corollaires, que l'on va exposer, ont une grande importance en Physique.

Si, pour les valeurs de x, y comprises dans une région $\mathcal{R}$ du plan, l'expression $M\,dx+N\,dy$ est une différentielle exacte, on sait que l'on a $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$, et réciproquement (Tome I, n° 327). En ce cas l'intégrale

$$\iint_{C}\left(-\frac{\partial M}{\partial y}+\frac{\partial N}{\partial x}\right)dx\,dy$$

est *nulle* quel que soit le champ C dans la région $\mathcal{R}$; et, d'après la formule de Riemann, il en est de même de l'intégrale $\int_{\gamma}(M\,dx+N\,dy)$ quel que soit le contour γ dans $\mathcal{R}$.

Inversement, si $\int_{\gamma}$ est nul dans $\mathcal{R}$ quel que soit γ, $\iint_{C}$ l'est également d'après la formule de Riemann : je dis que dès lors la quantité $-\frac{\partial M}{\partial y}+\frac{\partial N}{\partial x}$ est nulle en tout point x, y, de $\mathcal{R}$. Car si elle ne l'était pas, on pourrait tracer autour de ce point un contour fermé, C, à l'intérieur duquel la quantité considérée garderait un signe constant, et l'intégrale $\iint_{C}$ ne serait pas nulle, contrairement à ce qui précède. Donc :

Si l'intégrale $\int(M\,dx+N\,dy)$ est nulle le long d'un con-

tour fermé quelconque, dans une certaine région du plan, l'expression $\mathrm{M}\,dx + \mathrm{N}\,dy$ *est, dans cette région, une différentielle exacte.*

Corollaire II. — La proposition s'étend au cas de trois variables.

Supposons que l'intégrale $\int(\mathrm{M}\,dx + \mathrm{N}\,dy + \mathrm{P}\,dz)$ où M, N, P sont des fonctions de x, y, z, soit nulle le long d'un contour, gauche ou plan *quelconque* de l'espace : elle sera nulle en particulier le long de tout contour, γ, tracé dans le plan $z = z_0$; comme elle se réduit alors à

$$\int_\gamma \mathrm{M}(x, y, z_0)\,dx + \mathrm{N}(x, y, z_0)\,dy,$$

on aura, d'après le corollaire précédent,

$$\frac{\partial \mathrm{M}(x, y, z_0)}{\partial y} = \frac{\partial \mathrm{N}(x, y, z_0)}{\partial x},$$

ou, puisque z_0 est arbitraire,

$$\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial y} = \frac{\partial \mathrm{N}}{\partial x},$$

identiquement, c'est-à-dire quels que soient x, y, z.

De même

$$\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial z} = \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x},$$

$$\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial z} = \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y}.$$

identiquement (quels que soient x, y, z), ce qui établit (Tome I, n° 328) que $\mathrm{M}\,dx + \mathrm{N}\,dy + \mathrm{P}\,dz$ est une différentielle exacte.

66. Remarque. — Il importe de préciser les conditions dans lesquelles la formule de Riemann est rigoureusement établie. On a supposé essentiellement que l'intégrale double a un sens, c'est-à-dire que $\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial y}$ et $\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial x}$ sont des fonctions *bien déterminées et continues de x et y, à l'intérieur et sur le contour de l'aire* C; on a également admis que les intégrales $\int \mathrm{M}\,dx$ et $\int \mathrm{N}\,dy$ ont un

sens, c'est-à-dire que les fonctions M et N sont *déterminées et continues sur le contour.*

En particulier, la formule est applicable si toutes les fonctions M, N, $\frac{\partial M}{\partial y}$, $\frac{\partial N}{\partial x}$, des variables indépendantes x et y, sont *bien déterminées et continues à l'intérieur et sur le contour de l'aire.*

67. **Application.** — Soit C une aire limitée par un contour γ quelconque, sans point multiple. On a, en faisant, dans la formule de Riemann, $M = -y$, $N = o$:

$$\int\int_C dx\,dy = -\int_\gamma y\,dx.$$

Le premier membre est l'aire de la portion C du plan; on peut donc dire que l'aire, $\mathcal{A}$, intérieure à un contour γ, sans point multiple, est donnée par l'intégrale curviligne $-\int_\gamma y\,dx$, le contour γ étant décrit dans le sens positif, ou à $\int_\gamma y\,dx$, le contour étant décrit dans le sens négatif.

On peut faire reposer sur cette remarque une démonstration, très simple, de la règle du changement de variables sous le signe $\int\int$.

Soit

$$I = \int\int_C f(x, y)\,d\sigma$$

l'intégrale double proposée; on pose

$$(6) \qquad x = \varphi(u, v), \qquad y = \psi(u, v).$$

Lorsque le point x, y reste dans le champ C, le point de coordonnées rectangulaires u, v reste à l'intérieur d'un champ C' : on suppose que la correspondance entre les points des deux champs est univoque, c'est-à-dire qu'à un point u, v de C' correspond un seul point x, y, de C; et réciproquement.

D'après cela, à une aire quelconque $\Delta\sigma$, intérieure à C, répond, à l'intérieur de C', une aire $\Delta\sigma'$; or il y a, entre $\Delta\sigma$ et $\Delta\sigma'$, une relation remarquable.

On a en effet, d'après ce qui précède,

$$\Delta\sigma = \int_\gamma y\,dx,$$

γ étant le contour de l'aire $\Delta\sigma$, décrit dans un sens tel que le second membre soit positif. En faisant dans cette intégrale curviligne *simple* le changement de variables (6), on trouve

$$\Delta\sigma = \int_{\gamma'} \psi(u, v)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}du + \frac{\partial\varphi}{\partial v}dv\right),$$

γ' étant le contour de l'aire $\Delta\sigma'$, puisque évidemment, lorsque le point x, y décrit γ, le point u, v décrit γ'.

Appliquons au second membre la formule de Riemann, en faisant

$$\text{M} = \psi\frac{\partial\varphi}{\partial u}, \qquad \text{N} = \psi\frac{\partial\varphi}{\partial v};$$

il vient

$$\Delta\sigma = \pm\int\int_{\Delta\sigma'}\left(-\frac{\partial\text{M}}{\partial v} + \frac{\partial\text{N}}{\partial u}\right)du\,dv = \pm\int\int_{\Delta\sigma'}\left(-\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial\varphi}{\partial u} + \frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)du\,dv.$$

On a mis $\pm$ parce qu'on ne sait pas dans quel sens le point u, v décrit γ' quand x, y décrit γ dans le sens considéré; il faut choisir le signe de façon que $\Delta\sigma$ soit positif.

Or, si l'on pose

$$\text{J}(u, v) = \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v} - \frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v}$$

(jacobien de φ, ψ par rapport à u, v), on peut écrire, en vertu du théorème de la moyenne,

$$\Delta\sigma = \pm\int\int_{\Delta\sigma'}\text{J}(u, v)\,du\,dv = \Delta\sigma' \bmod \text{J}(u', v'),$$

en désignant par u', v' un point de l'aire $\Delta\sigma'$ ou de son contour, et en se souvenant que le signe doit être choisi de manière que $\Delta\sigma$ soit positif. Cela posé, soit x', y' le point de l'aire $\Delta\sigma$ qui répond au point u', v'; on a, pour I, d'après la définition même de l'intégrale double,

$$\text{I} = \lim \Sigma f(x', y')\,\Delta\sigma,$$

c'est-à-dire en remplaçant x', y' par $\varphi(u', v')$, $\psi(u', v')$, et $\Delta\sigma$ par

sa valeur ci-dessus,

$$I = \lim \Sigma f[\varphi(u', v'),\ \psi(u', v')]\,\Delta\sigma' \bmod J(u', v'),$$

d'où, en passant à la limite, et puisque la somme s'étend à tous les éléments $\Delta\sigma'$ du champ C',

$$I = \int\int_{C'} f[\varphi(u, v),\ \psi(u, v)] \bmod J(u, v)\, du\, dv.$$

C'est la formule connue du changement de variables.

68. Formule d'Ostrogradsky. — Soit (*fig.* 38) V un volume, limité par une surface fermée Ω, que l'on supposera rencontrée en

Fig. 38.

deux points, au plus, par toute parallèle à Oz; désignons par $R(x, y, z)$ une fonction, continue ainsi que sa dérivée partielle $\frac{\partial R}{\partial z}$, à l'intérieur et sur la surface du volume V. L'intégrale triple

$$I = \int\int\int_V \frac{\partial R}{\partial z}\, dx\, dy\, dz$$

se transforme aisément. Calculons-la en commençant par l'intégration en z; on a, en désignant par C la région du plan des xy où se projettent les points du volume V, par z_1 et z_2 les cotes des points de la surface Ω qui répondent à x et y (*fig.* 38),

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} I &= \int\int_C dx\, dy \left[\int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial R}{\partial z}\, dz\right] \\ &= \int\int_C dx\, dy\,[R(x, y, z_2) - R(x, y, z_1)]. \end{aligned} \right.$$

Soit γ l'angle, compris entre o et π, que fait avec l'axe Oz, dirigé de O vers z, la normale à Ω en un point, x, y, z; cette normale, N, étant dirigée vers l'extérieur du volume V : γ est aigu au point z_2,

car la parallèle à Oz, issue de z_2, sort du volume V en ce point; de même γ est obtus au point z_1.

Si, maintenant, on désigne par Ω_2 et Ω_1 les portions de la surface Ω qui sont respectivement au-dessus et au-dessous de la courbe de contact des plans tangents parallèles à Oz, on a, d'après la formule (5) du n° 62,

$$\int\int_{\Omega_2} R(x, y, z_2) \cos\gamma \, d\omega = \int\int_C R(x, y, z_2) \cos\gamma \frac{dx\,dy}{|\cos\gamma|}$$
$$= \int\int_C R(x, y, z_2)\, dx\, dy,$$

car on a, sur Ω_2,

$$\cos\gamma = |\cos\gamma|,$$

puisque γ est aigu. De même, puisque l'on a sur Ω_1,

$$\cos\gamma = -|\cos\gamma|,$$

il viendra

$$\int\int_{\Omega_1} R(x, y, z_1) \cos\gamma \, d\omega = - \int\int_C R(x, y, z_1)\, dx\, dy.$$

Ajoutons ces deux égalités membre à membre, nous trouvons, puisque $\int\int_{\Omega_2} + \int\int_{\Omega_1} = \int\int_{\Omega}$,

$$(2) \quad \int\int_C dx\, dy [R(x, y, z_2) - R(x, y, z_1)] = \int\int_{\Omega} R(x, y, z) \cos\gamma \, d\omega.$$

En portant cette valeur dans (1), on arrive à la formule finale :

$$(3) \qquad I = \int\int\int_V \frac{\partial R}{\partial z}\, dx\, dy\, dz = \int\int_{\Omega} R(x, y, z) \cos\gamma \, d\omega,$$

γ étant l'angle, compris entre o et π, que fait, avec Oz, la normale en x, y, z, à la surface Ω, dirigée vers l'extérieur du volume V.

De même, en désignant par P et Q deux autres fonctions continues de x, y, z, et par α, β les angles que fait, avec Ox et Oy, la normale en un point de Ω, toujours dirigée vers l'extérieur de V, on trouverait

$$(4) \qquad \int\int\int_V \frac{\partial P}{\partial x}\, dx\, dy\, dx = \int\int_{\Omega} P(x, y, z) \cos\alpha \, d\omega,$$

$$(5) \qquad \int\int\int_V \frac{\partial Q}{\partial y}\, dx\, dy\, dz = \int\int_{\Omega} Q(x, y, z) \cos\beta \, d\omega,$$

d'où, par addition,

$$\int\!\!\int\!\!\int_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz = \int\!\!\int_\Omega (P \cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, d\omega.$$

C'est la formule d'Ostrogradsky (ou de Green), qui transforme une intégrale de volume en une intégrale de surface, et inversement.

Si la surface Ω est rencontrée en plus de deux points par des parallèles aux axes, il est aisé d'établir que la formule subsiste, en employant la méthode indiquée à propos de la formule de Riemann (n° 65).

69. Formule de Stokes. — Elle transforme l'une dans l'autre une intégrale de surface et une intégrale curviligne.

Soit ω une portion de surface, limitée par une ligne fermée λ. Nous admettrons que ω a deux faces distinctes, que nous appellerons ω' et ω'', de telle sorte qu'on ne puisse passer d'une face à l'autre, en cheminant sur la surface, qu'en traversant le contour λ. Nous appellerons *direction de la normale à une face* celle d'un rayon lumineux, réfléchi normalement par cette face supposée polie : les normales N' et N'' aux deux faces ω' et ω'', en un même point, ont ainsi des directions opposées.

Nous aurons également besoin de définir le sens d'un mouvement sur l'une ou l'autre face de ω. A cet effet, imaginons un observateur debout sur la face ω', par exemple, la tête sur la normale à cette face, placé près du contour λ et regardant ce contour : on dira qu'un mobile décrit le contour λ dans le sens positif, sur la face ω', si l'observateur le voit passer devant lui de droite à gauche. Sur la face ω'', le même mouvement aurait d'après cela le sens négatif.

70. Admettons, pour commencer (*fig.* 39), que la surface ω ne soit rencontrée qu'en un point, au plus, par toute parallèle à Oz; elle se projette dès lors dans l'aire σ_1, que limite, sur le plan des xy, la projection λ_1 du contour λ. Considérons une face de ω, la face ω', par exemple, dont une normale N' fait avec Oz un angle aigu : en chaque point de ω', la normale fera encore avec Oz un angle aigu, car la surface ω n'ayant pas, par hypothèse, de plan tangent parallèle à Oz, l'angle considéré ne peut

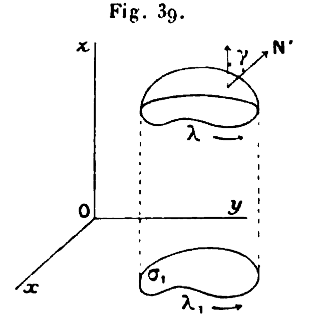
devenir droit et, comme il varie d'une manière continue, il reste aigu.

Si M est une fonction de x, y, on a, d'après la formule de Riemann, dans le plan des xy,

$$-\iint_{\sigma_1} \frac{\partial M}{\partial y}\, dx\, dy = \int_{\lambda_1} M(x, y)\, dx,$$

le contour λ_1 étant décrit dans le sens positif sur la face supérieure du plan des xy, en raison de la *disposition des axes de coordonnées*.

Fig. 39.



Supposons que M soit une fonction continue U, de x, y, z, et que z soit lui-même une fonction de x, y, définie par l'équation de la surface ω; on devra remplacer $\frac{\partial M}{\partial y}$ par $\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}$, et l'on aura :

$$(6) \qquad -\iint_{\sigma_1} \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right) dx\, dy = \int_{\lambda_1} U\, dx.$$

Or $\int_{\lambda_1} U\, dx$ est la même chose que $\int_{\lambda} U\, dx$, car x, y et dx sont les mêmes sur λ_1 et λ; le contour λ, dans cette nouvelle intégrale curviligne, est décrit, sur la face ω', dans le sens positif.

D'ailleurs, en désignant par γ l'angle aigu que fait, avec Oz, la normale à la face ω' au point x, y, z, on a, d'après la formule (5) du n° 62, F représentant, pour abréger, $\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}$,

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} \iint_{\omega'} F(x, y, z) \cos\gamma\, d\omega &= \iint_{\sigma_1} F(x, y, z) \cos\gamma \frac{dx\, dy}{|\cos\gamma|} \\ &= \iint_{\sigma_1} F(x, y, z)\, dx\, dy, \end{aligned} \right.$$

puisque $\cos\gamma = |\cos\gamma|$.

Remplaçons F par sa valeur; nous obtenons dans (6), en vertu de (7),

$$(8)\qquad -\int\!\!\int_{\omega'}\left(\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right)\cos\gamma\,d\omega=\int_{\lambda}U\,dx.$$

Enfin la normale à ω' ayant ses cosinus directeurs, $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, proportionnels à $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ et -1, on a

$$\frac{\cos\alpha}{\frac{\partial z}{\partial x}}=\frac{\cos\beta}{\frac{\partial z}{\partial y}}=-\cos\gamma,\qquad \text{d'où}\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\cos\beta}{\cos\gamma};$$

ce qui donne, dans (8),

$$-\int\!\!\int_{\omega'}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\cos\gamma-\frac{\partial U}{\partial z}\cos\beta\right)d\omega=\int_{\lambda}U(x,y,z)\,dx.$$

On aurait de même, en désignant par V et W des fonctions continues de x, y, z,

$$-\int\!\!\int_{\omega'}\left(\frac{\partial V}{\partial z}\cos\alpha-\frac{\partial V}{\partial x}\cos\gamma\right)d\omega=\int_{\lambda}V(x,y,z)\,dy,$$

$$-\int\!\!\int_{\omega'}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\cos\beta-\frac{\partial W}{\partial y}\cos\alpha\right)d\omega=\int_{\lambda}W(x,y,z)\,dz,$$

et, en ajoutant,

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned}&\int\!\!\int_{\omega'}\Big[\cos\alpha\left(\frac{\partial W}{\partial y}-\frac{\partial V}{\partial z}\right)\\&\qquad+\cos\beta\left(\frac{\partial U}{\partial z}-\frac{\partial W}{\partial x}\right)+\cos\gamma\left(\frac{\partial V}{\partial x}-\frac{\partial U}{\partial y}\right)\Big]\,d\omega\\&=\int_{\lambda}(U\,dx+V\,dy+W\,dz),\end{aligned}\right.$$

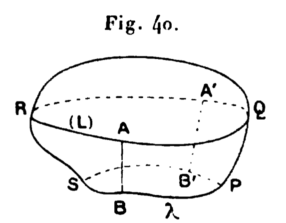
le contour λ étant, dans l'intégrale curviligne, décrit dans le sens positif.

C'est la *formule de Stokes*. Elle s'applique, sans modification, à la face ω'', car, pour cette face, $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ changent de signe, et le sens du mouvement sur la courbe λ doit également changer pour être positif sur ω''.

71. Si la surface ω est coupée en plus d'un point par une

parallèle à Oz, on la décomposera en surfaces $\omega_1, \omega_2, \ldots$ rencontrées en un seul point, au plus. Ainsi, dans le cas de la figure ci-dessous (*fig.* 40), on mènera la courbe (L) de contact des plans tangents parallèles à Oz, et les lignes AB, A'B' joignant deux points de (L) à deux points de λ.

Fig. 40.



La surface ω est ainsi divisée en trois parties :

1° La partie située au-dessus de (L);
2° La partie dont le contour est ABPB'A'QA;
3° La partie dont le contour est ARA'B'SBA.

Si l'on écrit la formule (9) pour chacune de ces parties et si l'on ajoute, les intégrales curvilignes suivant les lignes (L), AB et A'B' disparaissent, chacune d'elles figurant deux fois avec des signes contraires, et il reste la formule (9), appliquée à l'une des faces de ω et au contour λ.

La formule de Stokes est donc générale.

CHAPITRE III.

APPLICATIONS DIVERSES.

I. — INTÉGRATION SOUS LE SIGNE $\int$.

72. Règle. — Considérons l'intégrale

$$I = \int_a^b f(x, \alpha)\, dx,$$

dépendant d'un paramètre α, et dont les limites a et b sont indépendantes de α.

Proposons-nous de l'intégrer par rapport à α, entre deux limites constantes α_1 et α_2; c'est le problème inverse de celui de la dérivation traité dans le Tome I.

L'intégrale cherchée a pour symbole

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} d\alpha \left[\int_a^b f(x, \alpha)\, dx\right];$$

D'après la règle de calcul des intégrales doubles, ce n'est autre chose que l'intégrale $\int\int f(x, \alpha)\, dx\, d\alpha$, les variables de sommation étant x et α, prise dans le rectangle qui a pour côtés les droites

$$x = a, \qquad x = b, \qquad \alpha = \alpha_1, \qquad \alpha = \alpha_2;$$

on peut donc intervertir l'ordre des intégrations (n° 15), à condition que la fonction $f(x, \alpha)$ soit continue dans le rectangle, supposé lui-même fini; on a ainsi

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} d\alpha \int_a^b f(x, \alpha)\, dx = \int_a^b dx \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x, \alpha)\, d\alpha.$$

C'est la formule d'intégration sous le signe $\int$, tout à fait semblable à celle de dérivation : au lieu de remplacer, sous le

signe $\int_a^b$, la fonction $f(x, \alpha)$ par sa dérivée en α, on la remplace par son intégrale en α, entre les limites α_1 et α_2.

73. Si les limites a et b dépendent de α, la formule ci-dessus n'est plus exacte.

On peut ramener ce cas au précédent par un changement de variable. Dans l'intégrale

$$\int_a^b f(x, \alpha)\, dx,$$

posons

$$x = a + (b - a)y,$$

d'où

$$dx = (b - a)\, dy;$$

l'intégrale devient

$$\int_0^1 (b - a) f[a + (b - a)y, \alpha]\, dy,$$

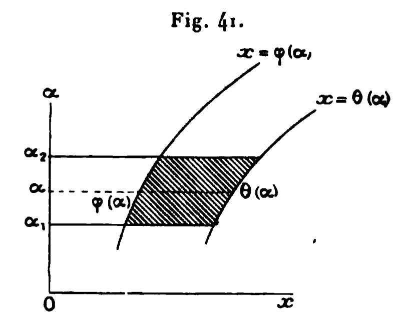
où les limites sont constantes. La formule du numéro précédent est alors applicable.

74. Autre méthode. — Soient

$$a = \varphi(\alpha), \qquad b = \theta(\alpha) \qquad (a < b)$$

les limites, variables avec α, de l'intégrale considérée; il s'agit de

Fig. 41.



calculer ou de transformer l'expression

$$(1) \qquad \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} d\alpha \left[\int_{\varphi(\alpha)}^{\theta(\alpha)} f(x, \alpha)\, dx\right].$$

C'est là une intégrale double prise dans un champ facile à déterminer.

Traçons en effet (*fig.* 41), dans le plan des $x\alpha$, les courbes $x = \varphi(\alpha)$, $x = \theta(\alpha)$; l'expression (1) n'est autre chose, d'après sa forme même, que l'intégrale double

$$\int\int f(x, \alpha)\, dx\, d\alpha,$$

prise dans le champ (ombré), limité par les courbes précédentes et les deux parallèles à Ox, d'ordonnées α_1 et α_2 : car, pour calculer cette intégrale *en commençant par l'intégration en x*, la règle générale conduit précisément à écrire l'expression (1).

Donc enfin, C étant le champ ombré, on a

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} d\alpha \int_{\varphi(\alpha)}^{\theta(\alpha)} f(x, \alpha)\, dx = \int\int_C f(x, \alpha)\, dx\, d\alpha,$$

l'intégrale du second membre pouvant ensuite être calculée par une méthode quelconque.

II. — CALCUL D'INTÉGRALES DÉFINIES.

---

75. Les règles d'intégration et de dérivation sous le signe $\int$ permettent d'obtenir la valeur de quelques intégrales définies, dont le calcul direct est impossible.

76. Calcul de l'intégrale $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$. — La fonction primitive de e^{-x^2} ne s'exprimant pas à l'aide des fonctions élémentaires, on ne peut évaluer directement cette intégrale importante, qui se rencontre dans diverses questions d'Analyse et de Physique mathématique. On trouvera sa valeur en faisant usage de la règle d'intégration sous le signe $\int$. Dans l'intégrale

$$J = \int_0^\infty e^{-x^2} dx,$$

posons $x = \alpha y$, α étant une constante positive, on a

$$J = \int_0^\infty e^{-\alpha^2 y^2} \alpha \, dy.$$

Multiplions les deux membres par $e^{-\alpha^2}$, et intégrons, par rapport à α, entre o et ∞ : J étant une constante absolue (indépendante de α), l'intégrale du premier membre sera

$$\int_0^\infty e^{-\alpha^2} d\alpha \, J \quad \text{c'est-à-dire} \quad J^2;$$

l'intégrale du second membre sera

$$\int_0^\infty e^{-\alpha^2} d\alpha \int_0^\infty e^{-\alpha^2 y^2} \alpha \, dy,$$

ou, en intervertissant l'ordre des intégrations ([1]),

$$\int_0^\infty dy \int_0^\infty e^{-\alpha^2(1+y^2)} \alpha \, d\alpha.$$

Or l'intégrale en α se calcule de suite; on a ainsi

$$J^2 = \int_0^\infty dy \left[-\frac{e^{-\alpha^2(1+y^2)}}{2(1+y^2)} \right]_{\alpha=0}^{\alpha=\infty} = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dy}{1+y^2} = \frac{1}{2} (\text{Arc} \tan y)_0^\infty = \frac{\pi}{4}.$$

Donc

(1) $$J = \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}.$$

77. De la formule (1) on peut déduire une infinité d'autres par la règle de dérivation. Il suffit en effet de faire un changement de variable, de manière à introduire un paramètre α, et de dériver les deux membres en α : c'est là un procédé général, applicable à toutes les intégrales définies dont on connaît la valeur. Posons, par exemple, dans (1),

$$x = y\sqrt{\alpha},$$

α étant positif; nous obtenons la formule :

(2) $$\int_0^\infty e^{-\alpha y^2} dy = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \, \alpha^{-\frac{1}{2}};$$

dérivons maintenant les deux membres par rapport à α.

([1]) Le champ d'intégration étant infini, cette interversion n'est pas nécessairement légitime; on admettra qu'on a le droit de la faire.

Je dis qu'*on peut appliquer en toute sécurité la règle de dérivation sous le signe* $\int$, bien que la limite supérieure soit infinie. En effet, la fonction $e^{-\alpha y^2}$ satisfait aux deux conditions du n° 323 du Tome I, à savoir : 1° cette fonction, $f(y, \alpha)$, et sa dérivée f'_α sont des fonctions continues de la variable α, lorsque α reste positif, et cela quelle que soit la valeur attribuée à y entre o et $+\infty$; 2° f''_{α^2} est finie et déterminée pour α et $y \geqq 0$. Reste donc seulement la difficulté provenant de la limite supérieure infinie. Or, d'après le n° 325 du Tome I, on pourra appliquer la règle de dérivation si l'intégrale

$$\int_0^\infty f''_{\alpha^2}(y, \alpha + \theta h)\, dy, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \int_0^\infty y^4 e^{-y^2(\alpha+\theta h)} dy,$$

a une valeur finie. On peut l'écrire

$$\int_0^\infty \frac{\psi(y)}{y^2}\, dy;$$

et comme la fonction $\psi(y)$, c'est-à-dire $y^6 e^{-y^2(\alpha+\theta h)}$, tend vers zéro pour y infini (car, α étant > 0, $\alpha + \theta h$ est > 0 pour h assez petit), l'intégrale est finie (Tome I, n° 298).

Donc enfin la règle de Leibniz s'applique et la dérivation par rapport à α des deux membres de (2) donne :

$$\int_0^\infty y^2 e^{-\alpha y^2} dy = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\frac{1}{2}\,\alpha^{-\frac{3}{2}};$$

puis, par une série de dérivations successives,

$$\int_0^\infty y^{2n} e^{-\alpha y^2} dy = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2^n}\,\alpha^{-\frac{2n+1}{2}};$$

78. Intégrale de Fourier. — Considérons l'intégrale

$$I = \int_0^\infty e^{-x^2} \cos 2\alpha x\, dx,$$

où α désigne une constante. Dérivons par rapport au paramètre α; on verra comme au numéro précédent que la règle de Leibniz est applicable. Donc

$$\frac{dI}{d\alpha} = \int_0^\infty -2xe^{-x^2} \sin 2\alpha x\, dx.$$

Or $-2xe^{-x^2}$ est la dérivée de e^{-x^2}; on a donc, en intégrant par parties,

$$\frac{dI}{d\alpha} = (e^{-x^2}\sin 2\alpha x)_0^\infty - 2\alpha\int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2\alpha x\, dx,$$

c'est-à-dire, puisque la quantité tout intégrée s'annule aux deux limites,

$$\frac{dI}{d\alpha} = -2\alpha I.$$

On en conclut, en séparant les variables I et α,

$$\frac{dI}{I} = -2\alpha\, d\alpha,$$

et, en intégrant,

$$\log I = -\alpha^2 + \log C;$$

ou

$$I = Ce^{-\alpha^2}.$$

On détermine la constante C en faisant $\alpha = 0$; I se réduit alors à $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$, c'est-à-dire $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ (nº 76), et l'on en conclut finalement la formule

$$I = \int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2\alpha x\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\, e^{-\alpha^2}.$$

III. — PROBLÈME D'ABEL.

---

79. **Problème.** — *Trouver la courbe suivant laquelle il faut laisser tomber un point matériel pesant pour qu'il parvienne en un point* O *(origine des coordonnées) au bout d'un temps qui soit une fonction donnée,* $F(h)$, *de la hauteur de chute h.*

Prenons pour axes Oz et Ox la verticale et l'horizontale du point O : en un point de la courbe, de hauteur z (*fig.* 42), le mobile est animé d'une vitesse égale à celle qu'il aurait s'il était tombé verticalement de la hauteur $h - z$, c'est-à-dire $\sqrt{2g(h-z)}$.

Soit $s = f(z)$ l'arc de la courbe, *compté à partir de* O; on aura d'après cela

$$-\frac{ds}{dt} = \sqrt{2g(h-z)},$$

ou

$$dt = -\frac{f'(z)}{\sqrt{2g(h-z)}}\,dz.$$

Le temps de chute, de A en O, sera

$$T = -\int_h^0 \frac{f'(z)}{\sqrt{2g(h-z)}}\,dz = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^h \frac{f'(z)}{\sqrt{h-z}}\,dz.$$

Fig. 42.

L'équation du problème est donc

$$(1) \qquad F(h) = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^h \frac{f'(z)}{\sqrt{h-z}}\,dz,$$

l'inconnue étant la fonction $f(z)$ [1].

Voici l'ingénieuse solution d'Abel.

Multiplions les deux membres de (1) par $\frac{dh}{\sqrt{\zeta - h}}$, ζ étant une constante, et intégrons par rapport à h, entre les limites o et ζ. Il vient

$$(6) \qquad \int_0^\zeta \frac{F(h)\,dh}{\sqrt{\zeta-h}} = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^\zeta \frac{dh}{\sqrt{\zeta-h}}\left[\int_0^h \frac{f'(z)}{\sqrt{h-z}}\,dz\right].$$

Loin de compliquer l'équation (1), comme il peut le paraître, cette nouvelle relation donne la solution immédiate du problème.

---

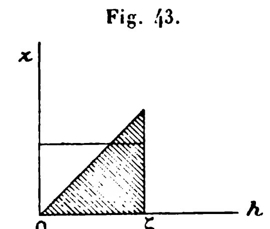
[1] Ce problème est un cas particulier du suivant : *Trouver une fonction* $f(x, \alpha)$, *assujettie ou non à certaines conditions de forme, telle que l'intégrale* $\int_a^b f(x, \alpha)\,dx$ *soit égale à une fonction donnée de* α. *Les limites* a *et* b *peuvent être des constantes ou des fonctions de* α. *C'est le problème inverse de celui du calcul des intégrales définies; il n'a reçu aucune solution dans le cas général.*

Le second membre de (2), en effet, est, par rapport aux variables de sommation h et z, égal à l'intégrale double

$$I = \int\int \frac{dh\,dz}{\sqrt{2g}} \frac{f'(z)}{\sqrt{(\zeta - h)(h - z)}},$$

prise, dans le plan de ces variables, à l'intérieur d'un champ que l'on détermine aisément (*voir* n° 74) : la forme (2) de l'intégrale montre que, h étant fixe, les limites de z sont o et h; les valeurs extrêmes de h sont ensuite o et ζ. Le champ est donc le triangle formé par l'axe Oh, la bissectrice $z = h$, et la parallèle à Oz d'abscisse ζ (région ombrée) (¹) (*fig.* 43).

Fig. 43.



Calculons maintenant l'intégrale double I en commençant par l'intégration en h : les limites de h sont alors z et ζ, les valeurs extrêmes de z étant ensuite o et ζ. Donc, le second membre de (2) peut s'écrire

(2 *bis*)
$$\frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^\zeta dz \int_z^\zeta \frac{f'(z)\,dh}{\sqrt{h - z}\sqrt{\zeta - h}}.$$

Dans l'intégration par rapport à h, z est regardé comme constant, d'après la règle de calcul des intégrales doubles; par suite

$$\int_z^\zeta \frac{f'(z)\,dh}{\sqrt{h - z}\sqrt{\zeta - h}} = f'(z) \int_z^\zeta \frac{dh}{\sqrt{h - z}\sqrt{\zeta - h}}.$$

(¹) La fonction qui, dans l'expression de I, figure sous le signe $\int\int$, à savoir $\frac{f'(z)}{\sqrt{(\zeta - h)(h - z)}}$, devient infinie sur les droites $z = h$ et $h = \zeta$, qui sont deux des côtés du triangle champ. Mais, comme les exposants de $\zeta - h$ et $h - z$ au dénominateur sont égaux à $\frac{1}{2}$, c'est-à-dire inférieurs à 1, l'intégrale I est néanmoins finie et déterminée dans le champ ombré (n° 54).

L'intégrale qui figure au second membre de cette dernière relation se calcule aisément : elle est égale à π [1]. Elle est donc, et c'est là le point fondamental, indépendante de z; et il reste, pour la valeur de (2 *bis*),

$$\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^\zeta \pi f'(z)\,dz, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{\pi}{\sqrt{2g}}[f(\zeta)-f(0)].$$

Or $f(0)$ est nul, l'arc $f(z)$ étant compté à partir de l'origine; donc enfin, remplaçant par cette valeur de (2 *bis*) le second membre de (2), on a l'équation

$$(3) \qquad \frac{\sqrt{2g}}{\pi}\int_0^\zeta \frac{F(h)}{\sqrt{\zeta-h}}\,dh = f(\zeta),$$

ce qui, la fonction F étant connue, donne l'expression cherchée de la fonction inconnue $f(\zeta)$, sous forme d'une intégrale définie, dépendant du paramètre ζ.

Connaissant ainsi $f(z)$, c'est-à-dire l'expression de l'arc s de la courbe en fonction de l'ordonnée z, on écrira, pour trouver l'équation de cette courbe en x et z,

$$ds = \sqrt{dx^2 + dz^2} = f'(z)\,dz;$$

d'où, en élevant au carré et séparant les variables x et z,

$$dz\sqrt{f'^2(z)-1} = dx$$

et, en intégrant,

$$(4) \qquad x = \int \sqrt{f'^2(z)-1}\,dz + \text{const.}$$

On déterminera la constante de manière que z soit nul pour $x=0$, et l'on aura ainsi, par (4), l'équation cartésienne de la courbe cherchée.

---

[1] Le plus simple est de faire dans l'intégrale $\int_z^\zeta \frac{dh}{\sqrt{(h-z)(\zeta-h)}}$, où z et ζ sont des constantes, le changement de variable

$$h = z + (\zeta - z)\sin^2\omega, \qquad dh = 2(\zeta - z)\sin\omega\cos\omega\,d\omega,$$

ce qui donne pour l'intégrale cherchée

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\zeta-z)\sin\omega\cos\omega}{\sqrt{(\zeta-z)\sin^2\omega(\zeta-z)\cos^2\omega}}\,d\omega = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\omega = \pi.$$

80. Courbe tautochrone. — Comme application, cherchons la courbe (dite *tautochrone*) pour laquelle le temps de chute est indépendant de la hauteur de chute h; il faut faire

$$F(h) = t_0,$$

ce qui donne, dans (3),

$$f(\zeta) = \frac{\sqrt{2g}}{\pi} \int_0^{\zeta} t_0 \frac{dh}{\sqrt{\zeta - h}} = 2\frac{\sqrt{2g}}{\pi} t_0 \sqrt{\zeta}.$$

Donc l'arc s, ou $f(z)$, est proportionnel à la racine carrée de l'ordonnée z; posons pour simplifier $s = \sqrt{8az}$, il vient

$$f'(z) = \sqrt{\frac{2a}{z}},$$

et l'équation cartésienne (4) de la courbe s'écrit

$$x = \int \sqrt{\frac{2a - z}{z}}\, dz + \text{const.}$$

L'intégrale indéfinie au second membre s'obtiendrait, selon la méthode générale, par le changement de variable $\frac{2a - z}{z} = u^2$; il sera plus simple d'opérer autrement. Posons

$$z = a(1 - \cos t), \qquad dz = a \sin t\, dt,$$

il vient

$$x = a \int \sqrt{\frac{a(1 + \cos t)}{a(1 - \cos t)}} \sin t\, dt + \text{const.}$$

$$= a \int (1 + \cos t)\, dt + \text{const.} = a(t + \sin t) + \text{const.}$$

La constante est nulle, car pour $z = 0$, c'est-à-dire $t = 0$, x doit être nul.

Les équations paramétriques de la courbe sont donc

$$x = a(t + \sin t),$$
$$z = a(1 - \cos t).$$

C'est une *cycloïde*, symétrique par rapport à Ox de la développée de la cycloïde étudiée au n° 382 du Tome I.

CHAPITRE IV.

FONCTIONS EULÉRIENNES.

I. — PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES.

81. Les fonctions eulériennes sont un exemple intéressant de fonctions représentées par des intégrales définies; elles jouent un rôle assez important en Analyse et en Physique.

On nomme *fonction eulérienne de seconde espèce*, et l'on désigne par $\Gamma(\alpha)$, la fonction de α

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-x} x^{\alpha-1}\, dx. \tag{1}$$

L'intégrale n'a une valeur finie et déterminée (Tome I, n° 308) que si α est positif; elle définit donc, dans ce cas, une fonction de α, laquelle est toujours positive, puisque tous les éléments de l'intégrale sont positifs.

Pour α nul, $\Gamma(\alpha)$ est infini.

82. Théorème. — On a

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\,\Gamma(\alpha).$$

En effet, l'intégration par parties donne :

$$\Gamma(\alpha+1) = \int_0^\infty \underbrace{x^\alpha}_{u}\, \underbrace{e^{-x}\, dx}_{dv} = \left(-e^{-x} x^\alpha\right)_0^\infty + \alpha \int_0^\infty e^{-x} x^{\alpha-1}\, dx.$$

Le terme tout intégré s'annule aux deux limites (puisque α est positif) et le dernier terme est $\alpha\,\Gamma(\alpha)$. C. Q. F. D.

83. Corollaire. — Si α est entier, on a

$$\Gamma(\alpha+1) = 1.2.3\ldots\alpha.$$

En effet

$$\Gamma(\alpha+1)=\alpha\,\Gamma(\alpha)=\alpha(\alpha-1)\,\Gamma(\alpha-1)=\ldots=\alpha(\alpha-1)\ldots2.1.\Gamma(1).$$

Mais

$$\Gamma(1)=\int_0^{\infty}e^{-x}\,dx=(-e^{-x})_0^{\infty}=1,$$

ce qui établit le Corollaire.

L'importance de la fonction Γ vient de cette relation avec les factorielles.

Le théorème du n° **82** permet de calculer $\Gamma(\alpha)$, pour une valeur quelconque de α, lorsqu'on connaît la fonction pour toutes les valeurs de α comprises entre o et 1; nous verrons plus bas qu'il suffit même de connaître $\Gamma(\alpha)$ pour les valeurs comprises entre o et $\frac{1}{2}$.

84. Produit de deux fonctions Γ. — On a

$$\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)=\int_0^{\infty}e^{-x}x^{\alpha-1}\,dx\int_0^{\infty}e^{-y}y^{\beta-1}\,dy,$$

ce qu'on peut écrire, sous forme d'intégrale double,

$$\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)=\iint e^{-(x+y)}x^{\alpha-1}y^{\beta-1}\,dx\,dy, \tag{2}$$

le champ étant l'angle positif des axes, considéré comme la limite d'un rectangle dont deux côtés sont Ox et Oy, et dont les deux autres s'éloignent à l'infini : ce champ est défini par $x\geqq 0$, $y\geqq 0$.

Faisons, dans l'intégrale double (2), le changement de variables

$$x=uv,\qquad y=u(1-v);$$

le jacobien $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ est $v(-u)-u(1-v)=-u$; quant au nouveau champ en u, v, il est défini par

$$uv\geqq 0,\qquad u(1-v)\geqq 0,$$

d'où l'on tire, en ajoutant membre à membre,

$$u\geqq 0$$

et, par suite,

$$0\leqq v\leqq 1.$$

Le champ C′ en u, v est donc la région ombrée (*fig.* 44) limitée par l'axe des v ($u = 0$), l'axe des u ($v = 0$), et la parallèle à Ou, $v = 1$.

On a alors, en remplaçant dans l'intégrale double (2), x par uv, y par $u(1-v)$, et $dx\,dy$ par $du\,dv$ mod $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$, c'est-à-dire par $u\,du\,dv$, puisque, dans le champ C′, u est positif,

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) = \int\int_{C'} e^{-u} u^{\alpha+\beta-1} v^{\alpha-1}(1-v)^{\beta-1}\,du\,dv,$$

ce qui s'écrit, d'après la règle de calcul d'une intégrale double,

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) = \int_0^1 v^{\alpha-1}(1-v)^{\beta-1}\,dv \times \int_0^\infty e^{-u} u^{\alpha+\beta-1}\,du.$$

Au second membre, la seconde intégrale est $\Gamma(\alpha+\beta)$; la première est une intégrale nouvelle, fonction de α et de β, que l'on

Fig. 44.

désigne par le symbole $B(\alpha, \beta)$, et que l'on nomme *intégrale eulérienne de première espèce*.

Donc, enfin,

$$(3) \qquad \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) = \Gamma(\alpha+\beta)\,B(\alpha,\beta);$$

$$(4) \qquad B(\alpha,\beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx,$$

α et β désignant deux quantités positives quelconques.

85. Autres formes de $B(\alpha, \beta)$. — 1° La formule (3) montre que $B(\alpha, \beta) = B(\beta, \alpha)$, ce qu'on vérifierait directement en posant, dans l'équation (4), $x = 1 - y$. Ainsi :

$$(4') \qquad B(\alpha,\beta) = \int_0^1 x^{\beta-1}(1-x)^{\alpha-1}\,dx.$$

2° Posons, dans l'intégrale (4), $x = \sin^2 \omega$; il vient

$$(4') \qquad B(\alpha, \beta) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2\alpha-1}\omega \cos^{2\beta-1}\omega \, d\omega.$$

3° Posons enfin, dans (4),

$$x = \frac{1}{1+y};$$

on trouve

$$(4'') \qquad B(\alpha, \beta) = \int_0^{\infty} \frac{y^{\beta-1}}{(1+y)^{\alpha+\beta}} dy.$$

Si, dans cette formule, on suppose $\alpha + \beta = 1$, il vient

$$B(1-\beta, \beta) = \int_0^{\infty} \frac{y^{\beta-1}}{1+y} dy;$$

on a par suite, d'après (3), en se rappelant que $\Gamma(1) = 1$,

$$\Gamma(\beta)\Gamma(1-\beta) = \int_0^{\infty} \frac{y^{\beta-1}}{1+y} dy.$$

Nous verrons plus tard que l'intégrale qui figure au second membre est égale à $\frac{\pi}{\sin \beta\pi}$; on aura donc

$$(5) \qquad \Gamma(\beta)\Gamma(1-\beta) = \frac{\pi}{\sin \beta\pi},$$

formule qui permet de calculer $\Gamma(\alpha)$ pour les valeurs de la variable comprises entre $\frac{1}{2}$ et 1, quand on l'aura calculée pour les valeurs comprises entre 0 et $\frac{1}{2}$. Cette formule suppose naturellement $0 < \beta < 1$, puisque $\Gamma(\alpha)$ n'a été défini que pour des valeurs positives de α.

86. Valeur de $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$. — Si, dans (4″), on fait $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$, il vient

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\omega = \pi.$$

D'ailleurs, par (3),

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \Gamma(1) B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Comme $\Gamma(1) = 1$ (n° 44), on a

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = \pi, \qquad \text{d'où} \qquad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

On peut encore faire ce calcul comme il suit. Dans l'équation

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-x} x^{\alpha-1}\, dx$$

posons $x = y^2$; il vient

$$\Gamma(\alpha) = 2\int_0^\infty e^{-y^2} y^{2\alpha-1}\, dy,$$

d'où (n° 76)

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^\infty e^{-y^2}\, dy = \sqrt{\pi}.$$

Tables. — Il existe des Tables donnant les valeurs de $\Gamma(\alpha)$; ces Tables permettent aussi, d'après (3), de calculer $B(\alpha, \beta)$.

87. Valeur approchée de $\Gamma(n)$ pour n très grand. — La relation de $\Gamma(n)$ avec les factorielles montre que, pour des valeurs entières de n, $\Gamma(n)$ croît avec n et croît même très rapidement. Legendre a d'ailleurs prouvé que $\Gamma(x)$, qui est infini pour $x = 0$, commence par décroître, passe par un minimum pour une valeur de x comprise entre 1 et 2, et croît ensuite indéfiniment avec x.

Il y a intérêt, dans diverses questions, à connaître l'ordre de grandeur, par rapport à n, de $\Gamma(n+1)$, ou de la factorielle $1.2\ldots n$; voici la marche à suivre pour arriver au résultat désiré.

88. On a, par définition,

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty e^{-x} x^n\, dx; \tag{6}$$

la fonction sous le signe $\int$, $e^{-x}x^n$, va de 0 à 0 quand x va de 0 à ∞, si l'on suppose $n > 0$; elle passe, comme on le voit, en prenant sa dérivée, $(n - x)e^{-x}x^{n-1}$, par un et un seul maximum pour $x = n$; ce maximum est $n^n e^{-n}$. Faisons alors, dans l'intégrale de définition (6), le changement de variable

$$x^n e^{-x} = n^n e^{-n} e^{-t^2} \qquad (t = \text{nouvelle variable d'intégration}). \tag{7}$$

Quand x va de 0 à n, puis de n à $+\infty$, t^2 est réel et positif

et va de $+\infty$ à o, puis de o à $+\infty$; quant à t, on peut se donner arbitrairement son signe, puisqu'il n'est assujetti qu'à vérifier (7) : prenons alors t négatif pour x compris entre o et n, et positif pour x compris entre n et $+\infty$; t ira ainsi de $-\infty$ à $+\infty$.

Calculons maintenant dx; pour simplifier, posons

$$x = n + u$$

et cherchons du, qui est égal à dx; à cet effet, prenons les logarithmes des deux membres de (7) :

$$(8) \qquad n\log(n+u) - n - u = n\log n - n - t^2.$$

On a, en différentiant,

$$du\left(\frac{n}{n+u} - 1\right) = -2t\,dt,$$

d'où

$$du = \frac{2t(u+n)}{u}dt.$$

Portons cette valeur, et la valeur (7) de $x^n e^{-x}$, dans $\Gamma(n+1)$, c'est-à-dire dans (6) :

$$(9) \qquad \Gamma(n+1) = 2n^n e^{-n}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\left(t + \frac{nt}{u}\right)dt.$$

Le changement de variable n'est pas terminé, puisque u reste sous le signe $\int$: il faudrait le tirer de (8) en fonction de t, ce qui n'est pas possible explicitement; on se bornera dès lors à une approximation.

Remplaçons, dans (8), $\log(n+u)$ par son développement de Maclaurin réduit aux deux premiers termes et au reste; il vient

$$n\left[\log n + \frac{u}{n} - \frac{u^2}{2}\frac{1}{(n+\theta u)^2}\right] - u = n\log n - t^2,$$

et, après réductions,

$$(10) \qquad \frac{nu^2}{2(n+\theta u)^2} = t^2, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{u}{n+\theta u} = t\sqrt{\frac{2}{n}} \qquad (0 < \theta < 1).$$

Il faut prendre le signe + devant le radical, car : 1° u et t sont de même signe, puisque u, ou $x - n$, est négatif, comme t,

pour $0 < x < n$, et positif, comme t, pour $n < x < \infty$; 2° $n + \theta u$ est toujours positif, puisque la plus petite valeur de u (ou $x - n$) est $-n$, et qu'on a $0 < \theta < 1$.

Tirons alors $\frac{1}{u}$ de (10) en fonction de t et de la quantité inconnue θ (fonction de u et de n) :

$$\frac{1}{u} = \frac{1 - \theta t\sqrt{\frac{2}{n}}}{nt\sqrt{\frac{2}{n}}} = \frac{1}{nt}\left(\sqrt{\frac{n}{2}} - t\theta\right),$$

et portons-le dans l'expression (9) de $\Gamma(n+1)$; il vient

$$\Gamma(n+1) = 2n^n e^{-n}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\left(t + \sqrt{\frac{n}{2}} - t\theta\right)dt,$$

ce qui se décompose :

$$\Gamma(n+1) = 2n^n e^{-n}\left[\sqrt{\frac{n}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}t(1-\theta)\,dt\right].$$

Au second membre, la première intégrale est double de $\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt$, car e^{-t^2} est une fonction paire (Tome I, n° **263**, 4°); elle est donc égale à $\sqrt{\pi}$ (n° **37**), et l'on a

$$\Gamma(n+1) = \sqrt{2n\pi}\left(\frac{n}{e}\right)^n\left(1 + \frac{2}{\sqrt{2n\pi}}\,\mathrm{J}\right),$$

en posant

$$\mathrm{J} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}t(1-\theta)\,dt,$$

expression où θ désigne une fonction inconnue de t (puisque de u), qu'on sait seulement rester comprise entre 0 et 1. Je dis que J est compris entre $-\frac{1}{2}$ et $+\frac{1}{2}$.

En effet, décomposons J en deux intégrales $\int_{-\infty}^{0} + \int_0^{+\infty}$; la seconde est positive, puisque tous ses éléments sont positifs, et l'on a

$$\int_0^\infty e^{-t^2}t(1-\theta)\,dt < \int_0^\infty e^{-t^2}t\,dt = -\frac{1}{2}\left(e^{-t^2}\right)_0^\infty = \frac{1}{2}.$$

De même on verrait que l'intégrale $\int_{-\infty}^{0}$, qui est négative puisque tous ses éléments sont négatifs, est, en valeur absolue, inférieure à $\frac{1}{2}$; donc J est bien compris entre $-\frac{1}{2}$ et $+\frac{1}{2}$, et peut s'écrire $J=\frac{k}{2}$, avec $-1<k<1$. Donc enfin

$$(11) \qquad \Gamma(n+1)=\sqrt{2n\pi}\left(\frac{n}{e}\right)^n\left(1+\frac{k}{\sqrt{2n\pi}}\right) \qquad (-1<k<1).$$

Dès que n est assez grand, le terme $\frac{k}{\sqrt{2n\pi}}$ est, en valeur absolue, très inférieur à 1, et l'on a sensiblement

$$(12) \qquad \Gamma(n+1)=\sqrt{2n\pi}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

C'est la formule approximative cherchée; elle donne l'ordre de grandeur, en n, du produit $1.2.3...n$, quand n grandit indéfiniment.

89. **Remarque.** — Il importe d'observer que l'*erreur absolue* de la formule (12) peut être considérable; car elle a pour expression, d'après (11), $k\left(\frac{n}{e}\right)^n$, quantité qui peut devenir infinie avec n; mais l'*erreur relative*, $\frac{k}{\sqrt{2n\pi}}$, sera toujours très petite et de module inférieur à $\frac{1}{\sqrt{2n\pi}}$.

Une étude plus complète montrerait que le terme $\frac{k}{\sqrt{2n\pi}}$, développé suivant les puissances croissantes de $\frac{1}{n}$, a pour expression

$$\frac{k}{\sqrt{2n\pi}}=\frac{1}{12n}+\ldots,$$

ce qui montre que l'erreur absolue grandit indéfiniment avec n.

II. — APPLICATIONS DES FONCTIONS EULÉRIENNES.

90. Les fonctions Γ servent surtout à donner l'expression exacte ou approchée des factorielles et jouent à ce titre un rôle utile dans le Calcul des Probabilités (Théorème de Bernoulli).

En Analyse, elles ont offert un exemple important de fonctions représentées par des intégrales définies, et ont attiré l'attention d'Euler, Legendre, Gauss, Cauchy, Weierstrass, etc. qui en ont donné de nombreuses propriétés. Nous nous bornerons à dire qu'on a étendu la définition de la fonction $\Gamma(\alpha)$ au cas où α est négatif et même imaginaire, et nous signalerons la formule simple

$$\frac{d^2}{d\alpha^2}[\log \Gamma(\alpha)] = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{(\alpha+1)^2} + \ldots + \frac{1}{(\alpha+n)^2} + \ldots,$$

d'où l'on déduit aisément l'expression de $\frac{1}{\Gamma(\alpha)}$ sous forme de produit infini

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} = e^{c\alpha} \prod_{n=1}^{n=\infty} \left[\left(1+\frac{\alpha}{n}\right) e^{-\frac{\alpha}{n}}\right],$$

c étant la *constante* dite *d'Euler* ($c = 0,5772156 64\ldots$).

Les fonctions B et Γ permettent d'exprimer des intégrales définies qui se rencontrent fréquemment dans les applications; voici deux exemples.

91. Calcul d'intégrales. — Soit à calculer l'intégrale

$$I = \int_0^1 x^{m-1}(1-x^p)^{n-1}\,dx,$$

qui est évidemment finie et déterminée si $m > 0$, $n > 0$, $p > 0$.

Posons

$$x^p = y \quad \text{ou} \quad x = y^{\frac{1}{p}},$$

nous avons

$$I = \frac{1}{p}\int_0^1 y^{\frac{m}{p}-1}(1-y)^{n-1}\,dy = \frac{1}{p}\,B\left(\frac{m}{p}, n\right)$$

$$= \frac{1}{p}\,\frac{\Gamma\left(\frac{m}{p}\right)\Gamma(n)}{\Gamma\left(\frac{m}{p}+n\right)}$$

Ainsi :

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{4}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}.$$

92. Intégrale de Dirichlet. — Soit à calculer l'intégrale multiple

$$J = \iiint x^{\alpha-1} y^{\beta-1} z^{\gamma-1}\,dx\,dy\,dz \qquad (\alpha,\ \beta,\ \gamma \text{ positifs}),$$

dans le champ limité par le trièdre positif des axes de coordonnées et par la surface (¹)

$$\left(\frac{x}{a}\right)^m + \left(\frac{y}{b}\right)^n + \left(\frac{z}{c}\right)^p = 1 \qquad (m,\ n,\ p \text{ positifs}).$$

Faisons un changement de variables en posant

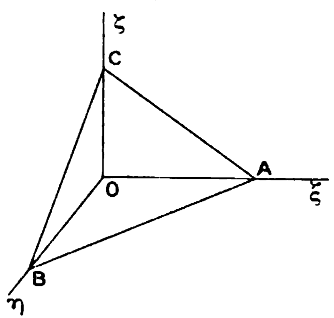
$$\left(\frac{x}{a}\right)^m = \xi, \qquad \left(\frac{y}{b}\right)^n = \eta, \qquad \left(\frac{z}{c}\right)^p = \zeta.$$

On aura

$$J = \frac{a^\alpha b^\beta c^\gamma}{mnp} \iiint \xi^{\frac{\alpha}{m}-1} \eta^{\frac{\beta}{n}-1} \zeta^{\frac{\gamma}{p}-1}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta,$$

le champ étant le tétraèdre OABC (*fig.* 45) limité par le trièdre

Fig. 45.



positif des axes $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ et par le plan

$$\xi + \eta + \zeta = 1.$$

(¹) Cette intégrale triple donne, comme cas particuliers, le volume et le moment d'inertie du champ par rapport aux axes de coordonnées

$$\iiint dx\,dy\,dz \quad \text{et} \quad \iiint x^2\,dx\,dy\,dz + \iiint y^2\,dx\,dy\,dz.$$

Commençons l'intégration par rapport à ζ; ξ et η étant fixes, les limites de ζ sont o et $1-\xi-\eta$; et l'on a

$$\begin{aligned}\iiint \xi^{\frac{\alpha}{m}-1}\eta^{\frac{\beta}{n}-1}\zeta^{\frac{\gamma}{p}-1}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta &= \iint \xi^{\frac{\alpha}{m}-1}\eta^{\frac{\beta}{n}-1}\,d\xi\,d\eta\left(\int_0^{1-\xi-\eta}\zeta^{\frac{\gamma}{p}-1}\,d\zeta\right)\\ &= \iint \xi^{\frac{\alpha}{m}-1}\eta^{\frac{\beta}{n}-1}\frac{p}{\gamma}(1-\xi-\eta)^{\frac{\gamma}{p}}\,d\xi\,d\eta,\end{aligned}$$

l'intégrale double ayant pour le champ l'intérieur du triangle OAB. Elle s'écrit donc

$$\frac{p}{\gamma}\int_0^1 \xi^{\frac{\alpha}{m}-1}d\xi\left[\int_0^{1-\xi}\eta^{\frac{\beta}{n}-1}(1-\xi-\eta)^{\frac{\gamma}{p}}d\eta\right].$$

Dans l'intégrale (entre crochets) par rapport à η, où ξ est *regardé comme constant*, posons

$$\eta = u(1-\xi), \qquad \text{d'où} \qquad d\eta = du(1-\xi);$$

l'expression totale devient

$$\frac{p}{\gamma}\int_0^1 \xi^{\frac{\alpha}{m}-1}d\xi\left[\int_0^1 u^{\frac{\beta}{n}-1}(1-u)^{\frac{\gamma}{p}}(1-\xi)^{\frac{\beta}{n}+\frac{\gamma}{p}}du\right],$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}&\frac{p}{\gamma}\int_0^1 \xi^{\frac{\alpha}{m}-1}(1-\xi)^{\frac{\beta}{n}+\frac{\gamma}{p}}d\xi\int_0^1 u^{\frac{\beta}{n}-1}(1-u)^{\frac{\gamma}{p}}du\\ &\qquad=\frac{p}{\gamma}\,\mathrm{B}\left(\frac{\alpha}{m},\frac{\beta}{n}+\frac{\gamma}{p}+1\right)\mathrm{B}\left(\frac{\beta}{n},\frac{\gamma}{p}+1\right).\end{aligned}$$

Donc enfin, en remplaçant les B par leurs expressions à l'aide des Γ, on a

$$J = \frac{a^\alpha b^\beta c^\gamma}{mnp}\,\frac{p}{\gamma}\,\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{m}\right)\Gamma\left(\frac{\beta}{n}+\frac{\gamma}{p}+1\right)\Gamma\left(\frac{\beta}{n}\right)\Gamma\left(\frac{\gamma}{p}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{m}+\frac{\beta}{n}+\frac{\gamma}{p}+1\right)\Gamma\left(\frac{\beta}{n}+\frac{\gamma}{p}+1\right)},$$

d'où, en réduisant et observant que $\Gamma\left(\frac{\gamma}{p}+1\right)=\frac{\gamma}{p}\Gamma\left(\frac{\gamma}{p}\right)$,

$$J = \frac{a^\alpha b^\beta c^\gamma}{mnp}\,\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{m}\right)\Gamma\left(\frac{\beta}{n}\right)\Gamma\left(\frac{\gamma}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{m}+\frac{\beta}{n}+\frac{\gamma}{p}+1\right)}.$$

93. *Par exemple,* le volume du huitième de l'ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ s'obtient en faisant dans cette formule

$$m=n=p=2, \qquad \alpha=\beta=\gamma=1,$$

ce qui donne

$$J=\frac{abc}{8}\,\frac{\Gamma^3\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}.$$

Or on sait que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ est égal à $\sqrt{\pi}$; de plus

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}\,\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}\sqrt{\pi};$$

donc

$$J=\pi\frac{abc}{6},$$

ce qui donne $\frac{4}{3}\pi abc$ pour le volume total.

94. **Transcendance du nombre** e. — Le nombre e ne peut être racine d'une équation algébrique à coefficients entiers : voici, de ce théorème, dû à Hermite, une démonstration très simple qui repose sur deux remarques préliminaires.

(a). Posons

$$\varphi(z)=e^{-z}z^p[(1-z)(2-z)\ldots(n-z)]^{p+1},$$

n et p désignant des entiers positifs, et considérons l'intégrale

$$I_0=\int_0^\infty \varphi(z)\,dz.$$

On peut écrire, en développant $\varphi(z)$ suivant les puissances croissantes de z, et désignant par $B_1, B_2, \ldots$ des entiers,

$$I_0=\int_0^\infty e^{-z}z^p[(n!)^{p+1}+B_1z+B_2z^2+\ldots+B_{n(p+1)}z^{n(p+1)}]\,dz,$$

c'est-à-dire

$$I_0=(n!)^{p+1}\Gamma(p+1)+B_1\Gamma(p+2)+\ldots,$$

d'où

$$\frac{1}{p!}I_0=(n!)^{p+1}+(p+1)B_1+(p+1)(p+2)B_2+\ldots,$$

et par suite, ce qui suffira pour la démonstration,

$$(1) \qquad \frac{1}{p!} I_0 = (n!)^{p+1} \pm \text{entier multiple de } (p+1).$$

(*b*). Considérons, en second lieu, l'intégrale

$$I_h = \int_h^\infty \varphi(z)\,dz,$$

où h est un entier positif, au plus égal à n.

On la ramène, comme la précédente, aux fonctions Γ, en posant

$$z = u + h,$$

ce qui donne

$$I_h = \int_0^\infty e^{-u-h}(u+h)^p[(1-u-h)(2-u-h)\ldots(n-u-h)]^{p+1}\,du.$$

Parmi les facteurs élevés à la puissance $p+1$, il y a un facteur u^{p+1}, puisque h est compris entre o et n (inclus); on a alors, en ordonnant le polynome en u sous le signe $\int$, suivant les puissances croissantes de u,

$$I_h = e^{-h}[C_1\Gamma(p+2) + C_2\Gamma(p+3) + \ldots],$$

C_1, C_2, étant des entiers. On en conclut

$$(2) \qquad e^h \frac{1}{p!} I_h = \pm \text{entier multiple de } (p+1).$$

93. Cela posé supposons que e satisfasse à l'équation

$$(3) \qquad A_0 + A_1 e + A_2 e^2 + \ldots + A_n e^n = 0,$$

les A étant des entiers. Multiplions les deux membres de (3) par $\frac{1}{p!} I_0$, l'entier n qui figure dans I_0 étant le degré de l'équation (3), et l'entier p étant laissé provisoirement arbitraire. On peut écrire le résultat, en remplaçant, dans le terme en e^h, l'intégrale I_0, qui est $\int_0^\infty \varphi(z)\,dz$, par $\int_0^h \varphi(z)\,dz + \int_h^\infty \varphi(z)\,dz$,

c'est-à-dire par $I_h + \int_0^h \varphi(z)dz$,

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &A_0 \frac{1}{p!} I_0 + A_1 \frac{1}{p!} e I_1 + A_2 \frac{1}{p!} e^2 I_2 + \ldots + A_n \frac{1}{p!} e^n I_n \\ &\qquad + A_1 \frac{1}{p!} e \int_0^1 + A_2 \frac{1}{p!} e^2 \int_0^2 + \ldots + A_n \frac{1}{p!} e^n \int_0^n = 0. \end{aligned}\right.$$

Or, d'après (1) et (2), la somme des termes de la première ligne est

$$(5)\qquad A_0 (n!)^{p+1} \pm \text{entier multiple de } (p+1).$$

Supposons maintenant que $(p+1)$ soit un nombre premier quelconque, supérieur à tous ceux qui divisent A_0 et $n!$: il est clair que l'expression (5) sera un entier *non nul;* je dis maintenant que l'on pourra prendre le nombre premier $p+1$ assez grand pour que les termes de la seconde ligne de (4) aient une somme aussi petite que l'on voudra.

En effet, dans l'intégrale

$$\int_0^h e^{-z} z^p [(1-z)(2-z)\ldots(n-z)]^{p+1} dz,$$

où l'on a $0 < h \leqq n$, les termes z, $(1-z)$, ..., $(n-z)$ sont compris entre $-n$ et $+n$; la valeur absolue de chacun d'eux est donc inférieure à n. D'ailleurs e^{-z} reste inférieur à 1, et par suite le module de l'intégrale est inférieur à

$$n^p n^{n(p+1)} h,$$

et *a fortiori* à

$$n^p n^{n(p+1)} n,$$

c'est-à-dire à

$$n^{n+1} n^{(n+1)p}.$$

Le module de la somme des termes de la seconde ligne de (4) est donc inférieur à

$$\frac{1}{p!} n^{n+1} n^{(n+1)p} (\text{mod}\, A_1 e + \text{mod}\, A_2 e^2 + \ldots + \text{mod}\, A_n e^n),$$

c'est-à-dire à

$$(6)\qquad \frac{M\, n^{(n+1)p}}{p!},$$

M étant une constante indépendante de p. Or on sait (n° 88) que

$$p! = \Gamma(p+1) = \sqrt{2p\pi}\left(\frac{p}{e}\right)^p (1+\varepsilon),$$

ε tendant vers zéro pour p infini. L'expression (6) s'écrit donc

$$M \frac{1}{\sqrt{2p\pi}\left(\frac{p}{en^{n+1}}\right)^p (1+\varepsilon)},$$

et l'on voit qu'elle tend vers zéro lorsque p tend vers l'infini, $(p+1)$ parcourant la suite des nombres premiers.

En résumé, dans le premier membre de l'équation (4), la première ligne est un entier *non nul;* la seconde est une quantité que l'on peut faire aussi petite que l'on veut : la somme des deux lignes ne peut donc être nulle, et l'on en conclut l'impossibilité de l'équation (4), c'est-à-dire de l'équation (3). C. Q. F. D.

Cette élégante démonstration est due à M. Hilbert.

DEUXIÈME PARTIE.

FONCTIONS D'UNE VARIABLE IMAGINAIRE; FONCTIONS ELLIPTIQUES ET APPLICATIONS.

CHAPITRE I.

THÉORIE DES FONCTIONS ANALYTIQUES.

I. — GÉNÉRALITÉS.

95. La deuxième Partie du Cours a pour objet l'étude générale des fonctions d'une variable imaginaire ou fonctions analytiques, (Tome I, n° 155), et, comme application directe, celle des fonctions elliptiques.

Si les quantités imaginaires ont joué, en Algèbre élémentaire et même en Géométrie, un rôle important, elles ont, en Analyse, un rôle capital : grâce à leur emploi systématique, la Science a subi, au cours du XIXe siècle, une transformation complète, qui a trouvé son origine et ses développements fondamentaux dans les travaux de Cauchy.

96. Fonction analytique. — Nous savons (Tome I, n° 155) qu'une expression $P(x, y) + iQ(x, y)$, où P et Q sont des fonctions réelles de x et y, est dite *fonction analytique* de l'imaginaire $z = x + yi$, si l'on a identiquement

$$(1) \qquad \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x};$$

cette fonction admet alors, par rapport à z, une dérivée, qui est $\frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x}$.

97. Uniformité. — Une fonction analytique a été dite *monodrome* ou *uniforme* dans une région R du plan, lorsque le point z, c'est-à-dire le point de coordonnées rectangulaires x et y, étant assujetti à rester dans cette région, la fonction prend, en chaque point, une valeur unique, indépendante du chemin suivi par le point z.

Ainsi (Tome I, n° 164), la fonction $(z-a)^m$, pour m non entier, n'est pas monodrome autour du point $z=a$: si z décrit, dans le sens positif, un contour fermé entourant une fois ce point, la fonction reprend, au point de départ, sa valeur initiale multipliée par $e^{2m\pi i}$. En particulier, $\sqrt{z-a}$ se reproduit multiplié par -1, c'est-à-dire change de signe.

98. Continuité. — La fonction $f(z)$ a été dite *continue* pour $z=z_0$ (Tome I, n° 165), lorsque, étant donné ε aussi petit qu'on veut, on peut assigner un nombre η tel qu'on ait

$$\text{mod}[f(z_0+h)-f(z_0)] < \varepsilon, \tag{2}$$

pour toutes les valeurs de h dont le module est inférieur à η.

Supposons que, pour $z=z_0$, $f(z)$ admette une dérivée finie $f'(z_0)$: c'est dire qu'étant donné ε', on peut assigner η' tel que l'on ait

$$\text{mod}\left[\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} - f'(z_0)\right] < \varepsilon',$$

pour toutes les valeurs de h de module inférieur à η'; il en résulte immédiatement que $f(z)$ est continue pour $z=z_0$.

La fonction $f(z)$ est dite *continue*, dans une région R du plan, si elle est continue pour tous les points de cette région.

Remarque. — Soit posé

$$z = x+iy, \qquad z_0 = x_0+iy_0, \qquad h = k+il, \qquad f(z) = P+iQ.$$

Si l'on observe que $\text{mod}(A+Bi)$ est au moins égal à mod A et à

mod B, l'inégalité (2) entraîne celles-ci :

$$\text{mod}[P(x_0+k, y_0+l) - P(x_0, y_0)] < \varepsilon,$$
$$\text{mod}[Q(x_0+k, y_0+l) - Q(x_0, y_0)] < \varepsilon,$$

pour toutes les valeurs réelles de k et l telles que $\sqrt{k^2+l^2}$ soit inférieur à η, et, *a fortiori*, pour les valeurs de k et l inférieures à $\frac{\eta}{\sqrt{2}}$ en valeur absolue : sous une autre forme si $f(z)$ est continue pour $z = z_0$, $P(x,y)$ et $Q(x,y)$ sont des fonctions continues des *deux variables* x et y, pour $x = x_0$, $y = y_0$.

La réciproque est à peu près évidente.

De même, si $f(z)$ est continue dans une région R, les fonctions $P(x,y)$, $Q(x,y)$, et, par suite, le module $\sqrt{P^2+Q^2}$, sont fonctions continues de x et y dans R.

Comme corollaire, mod $f(z)$ admet un maximum fini M dans toute région à l'intérieur et sur le contour de laquelle la fonction $f(z)$ est continue (Tome I, n° 6).

99. Fonctions holomorphes. — La fonction $f(z)$ est dite *holomorphe* dans une région du plan si elle y est *uniforme* et *continue*, ainsi que sa dérivée.

Ainsi, les polynomes entiers en z, les fonctions e^z, e^{z^2}, $\cos z$, $\sin z$ sont holomorphes dans tout le plan; les fractions rationnelles le sont dans toute région qui ne comprend aucune des racines du polynome dénominateur, car, en ces points, la fonction, devenant infinie, cesse d'être continue.

Les fonctions $\log(z-a)$, $\sqrt{z-a}$ sont holomorphes dans les régions où elles sont uniformes, c'est-à-dire (Tome I, n° 164) à l'intérieur de tout contour simple ne comprenant pas le point $z=a$.

Les *séries de puissances* sont holomorphes à l'intérieur de leur cercle de convergence, puisqu'elles sont, dans ce cercle, monodromes et continues, ainsi que leurs dérivées de tous ordres (Tome I, n°s 142-145).

Le *produit* de deux fonctions holomorphes dans une région est évidemment holomorphe dans la même région.

100. Points critiques. — On nomme *point ordinaire* d'une

fonction $f(z)$ un point tel que, dans son *voisinage,* c'est-à-dire à l'intérieur d'un cercle de rayon suffisamment petit ayant ce point pour centre, la fonction soit holomorphe. Un point non ordinaire est dit *critique* ou *singulier.*

Un point critique est *isolé* lorsqu'on peut l'entourer d'un cercle de rayon non nul, ne contenant aucun autre point critique.

Le point critique *isolé* peut être de diverses natures.

1° *Point de branchement.* — C'est un point qui empêche l'uniformité de la fonction dans une région comprenant ce point : en d'autres termes, si l'on fait décrire à la variable z un petit contour fermé entourant le point considéré a, et si l'on suit par continuité les variations de la fonction le long de ce parcours, on revient au point de départ avec une valeur de la fonction différente de la valeur initiale.

Ainsi, le point a est un branchement pour les fonctions $\log(z-a)$, $\sqrt{z-a}$, et $(z-a)^m$ lorsque m n'est pas entier (Tome I, n° 164); les points $z = \pm i$ sont des branchements pour $\sqrt{z^2+1}$, c'est-à-dire pour $\sqrt{z+i}\,\sqrt{z-i}$.

2° *Pôle.* — C'est un point où la fonction $f(z)$ devient infinie, mais de telle sorte que son inverse $\frac{1}{f(z)}$ reste holomorphe *au voisinage* de ce point a, c'est-à-dire à l'intérieur d'un cercle de centre a et de rayon non nul.

Ainsi, le point $z = 1$ est pôle des fonctions $\frac{1}{z-1}$, $\frac{1}{(z-1)^2}$, mais c'est un point de branchement pour $\frac{1}{\sqrt{z-1}}$.

Plus généralement, pour une fraction rationnelle, quotient de deux polynomes $A(z)$ et $B(z)$, que l'on peut toujours supposer sans racine commune, les racines (ou zéros) du dénominateur $B(z)$ sont évidemment des pôles, puisque $A(z):B(z)$ devient infini en un de ces points a, tandis que $B(z):A(z)$ reste holomorphe au voisinage de a.

De même pour la fonction $\operatorname{tang} z$, c'est-à-dire $\frac{\sin z}{\cos z}$, les zéros de $\cos z$, à savoir (Tome I, n° 158, corollaire 1°) les points $z = \frac{\pi}{2} + k\pi$, sont des pôles, car $\operatorname{tang} z$ y devient infinie, et la

fonction inverse, $\frac{\cos z}{\sin z}$, reste évidemment holomorphe autour de chacun d'eux.

3° *Point singulier essentiel.* — C'est un point critique, non pôle, tel que la fonction soit holomorphe entre deux cercles ayant ce point pour centre, et dont le moins grand a un rayon aussi petit qu'on veut.

Par exemple, l'origine $z = 0$ est point essentiel pour $e^{\frac{m}{z}}$: cette fonction, en effet, est holomorphe entre deux cercles quelconques ayant l'origine pour centre, et, pour prouver que ce point n'est ni point ordinaire, ni pôle, je vais prouver que la fonction y est indéterminée ([1]).

En effet, les points pour lesquels $e^{\frac{m}{z}}$ prend une valeur A sont fournis par la formule (Tome I, n° 158)

$$\frac{m}{z} = \log A + 2h\pi i, \qquad \text{ou} \qquad z = \frac{m}{\log A + 2h\pi i},$$

h désignant un entier arbitraire, et il est clair que l'on pourra choisir h assez grand pour que $\operatorname{mod} z$ soit aussi petit que l'on voudra : la fonction prend donc une valeur arbitraire, A, en des points aussi voisins que l'on veut du point $z = 0$, qui est dès lors un point d'indétermination.

Points non isolés. — Les points critiques d'une fonction peuvent être non isolés ; ainsi, le point $z = 0$ est critique non isolé pour la fonction $1 : \sin \frac{1}{z}$, parce que, les pôles de cette fonction étant les points $z = \frac{1}{k\pi}$, il est impossible d'entourer l'origine d'un cercle assez petit pour ne contenir aucun d'eux.

Dans d'autres cas, les points critiques peuvent former des lignes continues.

Remarque. — Soit $\varphi(z)$ une fonction holomorphe de z, quand z reste dans une région R ; le point $u = \varphi(z)$ reste alors, *sur le*

([1]) On démontre que cette propriété d'indétermination est caractéristique des points essentiels.

plan de la variable u, dans une région R′ : si $f(u)$ est fonction holomorphe de u dans R′, il est clair que $f[\varphi(z)]$ sera fonction holomorphe de z dans R.

Donc, les seuls points critiques possibles de la *fonction de fonction* $f[\varphi(z)]$ sont : 1° les points critiques de $\varphi(z)$; 2° les valeurs de z auxquelles correspondent, par $u=\varphi(z)$, des valeurs de u critiques pour $f(u)$.

Ainsi, les seuls points critiques possibles de $\log\varphi(z)$ et de $\sqrt{\varphi(z)}$ sont les points critiques et les zéros de $\varphi(z)$.

101. Il y a entre un pôle ou un point essentiel et un point de branchement une différence fondamentale. Soit, en effet (*fig.* 46),

Fig. 46.

une région R ne contenant qu'un point critique a de $f(z)$; entourons ce point d'un petit cercle. Si a est pôle ou point essentiel, $f(z)$ est holomorphe dans la région, non ombrée, comprise entre le cercle et le contour de R; si a est branchement, $f(z)$, par exemple, $\log(z-a)$ ou $\sqrt{z-a}$, n'est pas monodrome, ni, dès lors, holomorphe, dans cette région, puisque l'on peut tourner autour de a sans sortir de la partie non ombrée.

Une fonction, holomorphe au voisinage de chaque point d'une aire comprise entre deux contours simples, peut donc n'être pas holomorphe dans cette aire; au contraire, il est à peu près évident qu'une fonction, pour laquelle tous les points d'une région *à contour simple* (Tome I, n° 164) sont ordinaires, est holomorphe dans cette région.

102. Fonctions méromorphes. — Une fonction monodrome dans une région R et n'ayant pas, dans cette région, d'autres points critiques que des pôles, est dite *méromorphe* dans R.

Les fractions rationnelles, la fonction $\tang z$ et son inverse $\cot z$ sont méromorphes dans tout le plan : car elles sont uniformes et n'ont, comme points critiques, que les points où elles deviennent infinies; or ceux-ci sont des pôles (n° 100, 2°).

L'inverse $1 : f(z)$ d'une fonction $f(z)$, holomorphe ou méromorphe, est méromorphe : car elle ne cesse d'être holomorphe que pour les *zéros* de $f(z)$ [c'est-à-dire les points où $f(z)$ s'annule], et ces points sont évidemment des pôles de $1 : f(z)$.

De même, le quotient de deux fonctions, méromorphes dans une région, est méromorphe dans la même région; ses pôles possibles sont les pôles de la fonction numérateur et les zéros de la fonction dénominateur [1].

103. Point à l'infini. — On dit que $f(z)$ est holomorphe à l'infini, ou admet le point à l'infini comme point ordinaire, lorsque la *fonction de u*, $f\left(\frac{1}{u}\right)$, admet comme point ordinaire le point $u=0$.

De même, le point à l'infini sera, pour $f(z)$, branchement, pôle ou point essentiel, selon que le point $u=0$ sera branchement, pôle ou point essentiel pour $f\left(\frac{1}{u}\right)$.

Par exemple, le point à l'infini est essentiel pour e^{mz} parce que $u=0$ est point essentiel (n° 100, 3°) pour la fonction $e^{\frac{m}{u}}$; c'est un pôle pour z^2 et un point ordinaire pour $\frac{z^2-1}{z^2}$, parce que $u=0$ est un pôle pour $\frac{1}{u^2}$ et un point ordinaire pour $1-u^2$.

II. — INTÉGRALES DÉFINIES IMAGINAIRES.

---

104. Définition de l'intégrale imaginaire. — Soit $f(z)$ une fonction analytique de la variable z, continue dans une région; supposons que z aille de z_0 à Z en suivant un arc déterminé et fini, L,

---

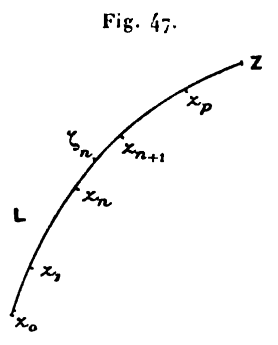
[1] Nous supposons, provisoirement, que les deux fonctions n'ont aucun zéro ou aucun pôle commun, car, en un tel point, leur quotient se présenterait sous forme indéterminée. Nous verrons plus tard que cette restriction est inutile.

de la région : marquons sur cette ligne L, en allant de z_0 vers Z, des points successifs $z_0, z_1, \ldots, z_n, \ldots, z_p$, Z; dans chaque intervalle $z_n z_{n+1}$, prenons sur L un point quelconque ζ_n, et considérons la somme

$$(1)\quad S = (z_1 - z_0)f(\zeta_0) + \ldots + (z_{n+1} - z_n)f(\zeta_n) + \ldots + (Z - z_p)f(\zeta_p).$$

Si nous augmentons le nombre de points z_n de manière que le module de toutes les différences $z_{n+1} - z_n$ décroisse indéfiniment,

Fig. 47.



je dis que la somme S tendra vers une limite, indépendante du choix des points z_n et ζ_n sur la ligne L. Écrivons, en effet, en mettant en évidence les parties réelles et imaginaires,

$$z_n = x_n + iy_n, \qquad \zeta_n = \xi_n + i\eta_n,$$
$$f(x+iy) = P(x, y) + iQ(x, y),$$

et portons ces valeurs dans la somme S; le terme général de celle-ci, à savoir $(z_{n+1} - z_n)\,f(\zeta_n)$, s'écrit :

$$[x_{n+1} - x_n + i(y_{n+1} - y_n)]\,[P(\xi_n, \eta_n) + iQ(\xi_n, \eta_n)],$$

et, en séparant le réel de l'imaginaire,

$$\begin{aligned}&(x_{n+1} - x_n)P(\xi_n, \eta_n) - (y_{n+1} - y_n)Q(\xi_n, \eta_n),\\ &+ i[(x_{n+1} - x_n)Q(\xi_n, \eta_n) + (y_{n+1} - y_n)P(\xi_n, \eta_n)].\end{aligned}$$

Or la somme des parties réelles

$$\sum (x_{n+1} - x_n)P(\xi_n, \eta_n) - (y_{n+1} - y_n)Q(\xi_n, \eta_n)$$

n'est autre chose, *à la limite,* qu'une intégrale curviligne prise le

long de l'arc L (n° 60), à savoir

$$\int_L (P\,dx - Q\,dy);$$

de même la somme des parties imaginaires a pour limite l'intégrale curviligne

$$i\int_L (Q\,dx + P\,dy),$$

de sorte qu'il vient finalement

$$(2) \qquad \lim S = \int_L (P\,dx - Q\,dy) + i\int_L (Q\,dx + P\,dy)$$

Les intégrales curvilignes ont un sens, puisque l'on suppose $f(z)$ et, par suite, P et Q continues le long de L, et que l'arc L est fini. La limite ainsi déterminée se représente par le symbole

$$\int_L f(z)\,dz,$$

et se nomme l'*intégrale de la fonction* $f(z)$ le long de l'arc L.

103. Cette définition, semblable à celle de l'intégrale définie réelle, conduit aux mêmes conséquences évidentes.

1° Si l'on divise l'arc L en deux portions L_1 et L_2, on a évidemment

$$\int_L = \int_{L_1} + \int_{L_2}.$$

2° L'intégrale suivant L en allant de z_0 à Z est égale et de signe contraire à l'intégrale prise suivant la même ligne, en allant de Z à z_0 (*voir* aussi n° 59).

3° Si M désigne le maximum du module [1] de $f(z)$ sur la ligne L, on aura

$$\text{mod}\,S \leqq M[\text{mod}(z_1 - z_0) + \text{mod}(z_2 - z_1) + \ldots + \text{mod}(Z - z_p)],$$

car le module d'une somme est au plus égal à la somme des modules.

---

[1] Un tel maximum existe, puisque $f(z)$ est continue dans une région qui comprend L (n° 98).

D'ailleurs $\mathrm{mod}(z_1 - z_0)$ est la longueur de la corde $z_0 z_1$, et ainsi de suite; la somme de ces cordes étant au plus égale à l'arc $z_0 Z$, on aura, en désignant par L la longueur de l'arc d'intégration et en passant à la limite,

$$\mathrm{mod}\left[\int_L f(z)\,dz\right] \leqq \mathrm{ML}.$$

106. Changement de variable. — Posons $z = F(u)$, en désignant par $F(u)$ une fonction analytique de u, et supposons que le point u, lorsque le point z décrit un arc L, décrive un arc Λ; admettons de plus que la relation $z = F(u)$ fasse correspondre, à un point z de L, un et un seul point u de Λ, et réciproquement.

Dans ces conditions, on démontre sans difficulté la formule

$$\int_L f(z)\,dz = \int_\Lambda f[F(u)]\,F'(u)\,du.$$

On part, pour cela, de l'expression (2) de l'intégrale proposée, mise sous la forme

$$\int_L (P + iQ)(dx + i\,dy),$$

ce qui ramène le changement de variable à une opération analogue dans une intégrale curviligne.

Théorème fondamental de Cauchy.

107. Théorème. — Toute la théorie qui va suivre a pour base une proposition importante et célèbre, due à Cauchy, et qui s'énonce ainsi :

Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans une région R *du plan, à contour simple : l'intégrale $\int f(z)\,dz$, prise le long d'une ligne fermée quelconque, tracée tout entière dans la région* R, *est nulle.*

Par *contour simple* on entend (Tome I, n° 164) un contour, sans point multiple, qui peut être tracé d'un seul mouvement

continu; l'aire intérieure à un cercle est à contour simple, l'aire comprise entre deux circonférences concentriques est à contour non simple ou *complexe*.

Désignons par γ une ligne fermée de la région R, supposée décrite, par exemple, dans le sens positif; on a, par ce qui précède,

$$(3)\qquad \int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma (P\,dx - Q\,dy) + i\int_\gamma (Q\,dx + P\,dy).$$

D'après l'hypothèse, $f(z)$ est holomorphe à l'intérieur du contour γ et sur ce contour, c'est-à-dire que les fonctions P et Q, ainsi que leurs dérivées partielles du premier ordre, sont bien déterminées et continues à l'intérieur de γ et sur γ; on peut donc (n° 66) appliquer aux deux intégrales curvilignes du second membre de (3) la formule de Riemann (n° 64), ce qui donne

$$\int_\gamma (P\,dx - Q\,dy) = -\int\int_C \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x}\right) dx\,dy,$$

$$\int_\gamma (Q\,dx + P\,dy) = \int\int_C \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dx\,dy,$$

C étant l'aire enveloppée par le contour γ. Mais, d'après les identités fondamentales du n° 96, à savoir,

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x},$$

les deux intégrales doubles ci-dessus sont identiquement nulles; il en est donc de même de deux intégrales simples, ce qui, d'après (3), démontre le théorème.

108. Extension. — Le théorème fondamental peut être étendu à un contour complexe.

Supposons que $f(z)$ soit holomorphe *dans* la région (non ombrée) comprise entre un contour simple γ et des contours simples γ_1, γ_2, ..., intérieurs à γ (*fig.* 48), ainsi que *sur* ces contours.

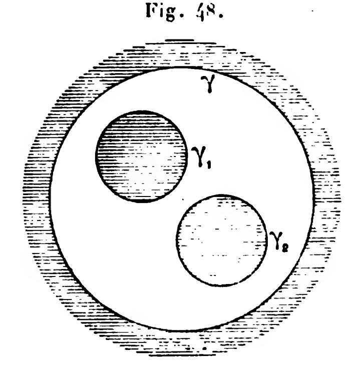
Joignons (*fig.* 49) deux points voisins de chaque contour intérieur à deux points voisins sur le contour γ, par des lignes infiniment voisines mn, $m'n'$, ...; nous formons ainsi un contour simple, à l'intérieur duquel $f(z)$ est encore holomorphe. Nous pouvons

donc appliquer à ce contour, décrit par exemple dans le sens des flèches, le théorème de Cauchy, ce qui donne évidemment :

$$\int_{\gamma} f(z)\,dx + \int_{mn} f(z)\,dz + \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{n'm'} f(z)\,dz + \ldots = 0.$$

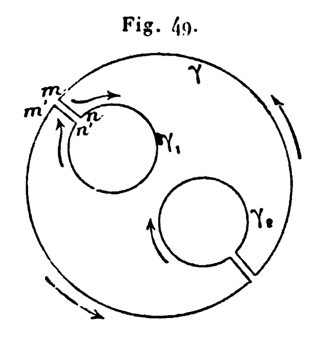
Or, quand les deux bords, mn et $m'n'$, de chaque coupure se

Fig. 48.



rapprochent indéfiniment, la fonction $f(z)$, holomorphe dans la région donnée, prend, à la limite, les mêmes valeurs le long de mn et de $m'n'$, de sorte que les deux intégrales $\int_{mn}$ et $\int_{m'n'}$, prises en sens contraire suivant la même ligne, se détruisent

Fig. 49.



(n° 103, 2°). Il reste donc

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz + \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz + \ldots = 0,$$

les contours γ_1 et γ_2 étant décrits dans le sens négatif, tandis que

γ l'est dans le sens positif. On peut aussi écrire

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz + \ldots,$$

les contours étant tous décrits dans le même sens.

C'est l'extension cherchée : *l'intégrale suivant le contour extérieur est égale à la somme des intégrales suivant les contours intérieurs.*

109. Corollaire I. — Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans une région à contour simple R; désignons par $z_0 aZ$ et $z_0 bZ$ deux lignes, allant d'un point z_0 à un point Z de R, sans sortir de

Fig. 50.

cette région (*fig.* 50). On a, en appliquant le théorème fondamental au contour simple que forment ces deux lignes,

$$\int_{z_0 aZ} f(z)\,dz + \int_{Zbz_0} f(z)\,dz = 0 \qquad \text{ou} \qquad \int_{z_0 aZ} = \int_{z_0 bZ}.$$

En d'autres termes, l'intégrale de $f(z)$, le long d'une ligne allant de z_0 à Z sans sortir de R, est indépendante du choix de cette ligne.

110. Corollaire II. — D'après cela, si $f(z)$ est holomorphe dans une région *à contour simple* R, l'intégrale

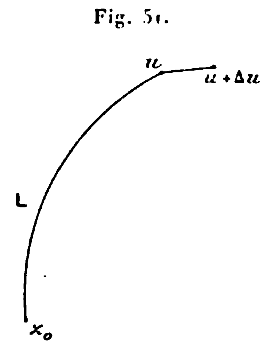
$$I(u) = \int_{z_0}^{u} f(z)\,dz,$$

prise le long d'une ligne quelconque, L, allant de z_0 à u et située dans R, est une fonction *uniforme* de sa limite supérieure u, dans

la région R : sa valeur est en effet unique, puisqu'elle est (n° 109) indépendante du choix de la ligne L. Je dis qu'elle est fonction *holomorphe de* u, et que sa dérivée est $f(u)$: il suffira d'établir ce dernier point, car l'intégrale $I(u)$ ayant une dérivée finie sera continue (n° 98) dans R; elle sera dès lors, dans cette région, uniforme et continue, ainsi que sa dérivée $f(u)$, donc holomorphe.

Cherchons donc l'accroissement ΔI de I quand on change u en $u+\Delta u$; soit L une ligne quelconque d'intégration allant de z_0

Fig. 51.



à u (*fig.* 51); pour ligne d'intégration de z_0 à $u+\Delta u$, prenons L, suivie du segment rectiligne qui joint les points u et $u+\Delta u$. On a alors

$$(4)\quad \Delta I = \int_u^{u+\Delta u} f(z)\,dz = \int_u^{u+\Delta u} f(u)\,dz + \int_u^{u+\Delta u} [f(z)-f(u)]\,dz.$$

Au dernier membre, la première intégrale est $f(u)\Delta u$, car u est une constante sous le signe $\int$, et $\int_u^{u+\Delta u} dz$ est égal, par la définition même de l'intégrale imaginaire, à Δu. D'ailleurs $f(z)$ est continue pour $z=u$; on peut donc prendre Δu assez petit pour que, z restant sur le segment u —— $u+\Delta u$, le module de $f(z)-f(u)$ demeure inférieur à tout nombre ε, et l'on a dès lors (n° 105, 3°)

$$\operatorname{mod} \int_u^{u+\Delta u} [f(z)-f(u)]\,dz < \varepsilon \operatorname{mod} \Delta u,$$

puisque la longueur du segment d'intégration est mod Δu. La rela-

tion (4) donne par suite :

$$\text{mod}[\Delta I - f(u)\Delta u] < \varepsilon \,\text{mod}\,\Delta u,$$

d'où

$$\text{mod}\left[\frac{\Delta I}{\Delta u} - f(u)\right] < \varepsilon,$$

ce qui établit que $\frac{\Delta I}{\Delta u}$ a pour limite $f(u)$ quand Δu tend vers zéro; la dérivée de $I(u)$ est donc $f(u)$. C. Q. F. D.

Ainsi :

L'intégrale d'une fonction $f(z)$, holomorphe dans une région à contour simple, est une fonction de sa limite supérieure z, holomorphe dans la même région; sa dérivée par rapport à z est $f(z)$.

111. Corollaire III. — Si $F(z)$ est une fonction holomorphe dans la région R, ayant pour dérivée $f(z)$, on aura

$$\int_{z_0}^{z} f(u)\,du = F(z) - F(z_0).$$

En effet, les deux membres, ayant même dérivée par rapport à z, ne peuvent (Tome I, n° 155, *Remarque*) différer que d'une constante, laquelle est nulle, puisque ces deux membres sont évidemment égaux (à zéro) pour $z = z_0$.

De là résulte également qu'on peut appliquer à l'intégrale $\int_{z_0}^{z} f(u)\,du$ l'intégration par parties.

112. Remarque. — Le théorème fondamental de Cauchy suppose $f(z)$ holomorphe à l'intérieur du contour d'intégration γ, et sur γ; il est généralement en défaut si cette condition n'est pas remplie.

Exemples. — 1° Soit l'intégrale $\int \frac{dz}{z-a}$ prise, dans le sens positif, le long d'une circonférence C, de rayon R, ayant pour centre le point $z = a$. On a, sur la circonférence, en désignant par φ l'argument de $z - a$,

$$z - a = R(\cos\varphi + i\sin\varphi) = R e^{i\varphi},$$

$$dz = R i e^{i\varphi} d\varphi;$$

d'où ce résultat à retenir :

$$\int_C \frac{dz}{z-a} = i\int d\varphi = 2\pi i,$$

puisque φ augmente de 2π quand on décrit la circonférence dans le sens positif.

L'intégrale n'est donc pas nulle; on voit d'ailleurs qu'elle ne dépend ni du rayon du cercle, ni du choix du point de départ de l'intégration, comme cela doit être en vertu du théorème de Cauchy étendu (n° 108). En effet, la fonction $\frac{1}{z-a}$ étant holomorphe entre deux circonférences C et C' de centre $z=a$, on a

$$\int_C \frac{dz}{z-a} = \int_{C'} \frac{dz}{z-a},$$

quel que soit le point de départ.

2° Au contraire, l'intégrale $\int \frac{dz}{\sqrt{z}}$ prise, par exemple, le long d'une circonférence de centre $z=0$ et de rayon R, dépend de R et de l'argument φ_0 du point initial, car si l'on pose

$$z = \mathrm{R}\,e^{i\varphi}, \qquad dz = \mathrm{R}\,e^{i\varphi}\,d\varphi, \qquad \sqrt{z} = \pm\sqrt{\mathrm{R}}\,e^{\frac{i\varphi}{2}},$$

on a

$$\int \frac{dz}{\sqrt{z}} = \pm i\sqrt{\mathrm{R}}\int_{\varphi_0}^{\varphi_0+2\pi} e^{\frac{i\varphi}{2}}\,d\varphi = \pm 2\sqrt{\mathrm{R}}\left(e^{\frac{i\varphi}{2}}\right)_{\varphi_0}^{\varphi_0+2\pi} = \mp 4\sqrt{\mathrm{R}}\,e^{\frac{i\varphi_0}{2}}.$$

III. — INTÉGRALE DE CAUCHY.

---

113. Formule de l'intégrale de Cauchy. — Soit $f(z)$ une fonction de z, holomorphe à l'intérieur d'un contour *simple* γ, et sur ce contour; désignons par a un point quelconque intérieur à γ : je dis qu'on a

$$(1) \qquad \int_\gamma \frac{f(z)-f(a)}{z-a}\,dz = 0.$$

En effet, la fonction de z, $\frac{f(z)-f(a)}{z-a}$, est évidemment holo-

morphe dans la région à contour complexe comprise entre le contour γ et une circonférence quelconque k, de centre a, intérieure à γ; on a donc, par le théorème de Cauchy étendu (n° 108),

$$\int_\gamma \frac{f(z)-f(a)}{z-a}\,dz = \int_k \frac{f(z)-f(a)}{z-a}\,dz.$$

L'intégrale qui figure au second membre est indépendante du rayon r de la circonférence k, puisque l'intégrale égale qui figure au premier membre n'en dépend pas; nous aurons établi qu'elle est nulle si nous prouvons que son module est manifestement inférieur à toute quantité donnée, lorsque r est choisi assez petit.

Or, sur la circonférence k, on peut poser, comme au n° 112,

$$(2) \qquad z-a = r\,e^{i\varphi}, \qquad dz = r\,i\,e^{i\varphi}\,d\varphi,$$

d'où

$$\int_k \frac{f(z)-f(a)}{z-a}\,dz = i\int_0^{2\pi} [f(z)-f(a)]\,d\varphi,$$

z étant, au dernier membre, supposé remplacé par sa valeur $a+r\,e^{i\varphi}$, sur k. Mais la fonction $f(z)$ est continue pour $z=a$, on peut donc prendre r assez petit pour que, z restant sur la circonférence k, $\mathrm{mod}[f(z)-f(a)]$ demeure inférieur à tout nombre ε, et l'on a dès lors

$$\mathrm{mod}\int_0^{2\pi} [f(z)-f(a)]\,d\varphi < \varepsilon\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi\varepsilon,$$

ce qui établit la formule (1). On peut écrire (1) sous la forme

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\,dz = f(a)\int_\gamma \frac{dz}{z-a};$$

or le second membre, en vertu du théorème de Cauchy étendu, est égal à $f(a)\int_k \frac{dz}{z-a}$, c'est-à-dire, par (2) (ou comme on l'a vu au n° 112), à $2\pi i f(a)$, en supposant les contours décrits dans le sens positif.

On a donc finalement la *formule de l'intégrale de Cauchy* :

$$(3) \qquad \int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\,dz = 2\pi i f(a),$$

γ étant décrit dans le sens positif, et a étant intérieur à γ.

Si le point a était extérieur à γ, le premier membre de (3) serait nul, puisque $f(z):(z-a)$ serait holomorphe dans γ et sur γ.

Extension à un contour complexe. — Si $f(z)$ est holomorphe dans la région R, comprise entre un contour γ_0 et des contours γ_1, γ_2, ... (*fig.* 52), et sur ces contours, on a, en désignant par k une petite circonférence ayant pour centre un point a de R (n° 108),

$$\int_{\gamma_0} \frac{f(z)}{z-a}\, dz = \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} + \ldots + \int_k .$$

Or, d'après (3), $\int_k \frac{f(z)}{z-a} dz$ est égal à $2\pi i f(a)$; ce qui donne :

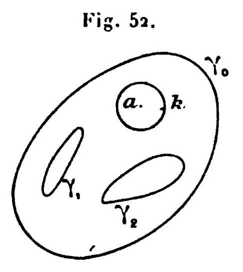
$$\int_{\gamma_0} \frac{f(z)}{z-a}\, dz - \int_{\gamma_1} \frac{f(z)}{z-a}\, dz - \int_{\gamma_2} \frac{f(z)}{z-a}\, dz - \ldots = 2\pi i f(a),$$

formule qu'on peut écrire

$$(3\ bis) \qquad \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-a}\, dz = 2\pi i f(a),$$

en convenant de représenter par $\int_\gamma$ la différence entre l'intégrale prise suivant γ_0, et la somme des intégrales prises suivant γ_1,

Fig. 52.



γ_2, ..., tous ces contours étant décrits dans le sens positif.

114. Expression des dérivées. — Dérivons une fois, deux fois, ..., par rapport à a les deux membres de l'équation (3) ou (3 *bis*), en appliquant, sous le signe $\int$, la règle ordinaire de dérivation, que

nous justifierons tout à l'heure. Il vient

(4) $$f'(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^2}\,dz,$$

$$f''(a) = \frac{1.2}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^3}\,dz,$$

. . . . ,

(5) $$f^{n}(a) = \frac{1.2\ldots n}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz.$$

Toutes les intégrales, dans les seconds membres, sont évidemment des fonctions uniformes de a, car leurs valeurs, pour une valeur de a, sont parfaitement déterminées tant que le point a n'est pas sur le contour γ : chacune d'elles, ayant pour dérivée la suivante, est dès lors une fonction analytique et continue de a. Donc : *Les dérivées d'une fonction holomorphe dans une région, à contour simple ou non, sont holomorphes dans la même région,* puisque chacune d'elles y est uniforme et continue, ainsi que sa dérivée.

Reste à justifier la dérivation sous le signe $\int$, pour une fonction du type

$$\varphi(a) = \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^n}\,dz,$$

n étant entier et positif.

Or on a, en formant $\varphi(a+h)$ et retranchant $\varphi(a)$,

$$\varphi(a+h) - \varphi(a) = \int_\gamma f(z)\left[\frac{1}{(z-a-h)^n} - \frac{1}{(z-a)^n}\right]dz;$$

d'ailleurs, l'identité classique de la division donne

$$\frac{1}{z-a-h} - \frac{1}{z-a} = \frac{h}{(z-a)^2} + \frac{h^2}{(z-a)^2(z-a-h)},$$

et, en dérivant $(n-1)$ fois les deux membres par rapport à a, on trouve immédiatement

$$\frac{1}{(z-a-h)^n} - \frac{1}{(z-a)^n} = \frac{nh}{(z-a)^{n+1}} + \frac{h^2}{(z-a)^{n+1}(z-a-h)^n}\,P(z,a,h),$$

$P(z, a, h)$ étant un polynome entier en z, a, h. Donc

$$\frac{\varphi(a+h)-\varphi(a)}{h} = n\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz + h\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}(z-a-h)^n}\,P(z, a, h)\,dz.$$

L'intégrale qui est le coefficient de h au second membre a son module fini : car, z restant sur le contour γ, et h demeurant voisin de a, à l'intérieur du contour, les modules des quantités $f(z)$, $(z-a)^{-n-1}$, $(z-a-h)^{-n}$, $P(z, a, h)$ sont évidemment limités et il en est de même de la longueur du contour γ; donc (n° **105**, 3°), le module de l'intégrale considérée est fini : il en résulte que la limite, pour $h=0$, du rapport $\frac{\varphi(a+h)-\varphi(a)}{h}$, c'est-à-dire la dérivée de $\varphi(a)$, est bien la quantité

$$n\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz,$$

conformément à la règle de dérivation sous le signe $\int$.

115. Remarque. — La formule de l'intégrale de Cauchy, (3) ou (3 *bis*),

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\,dz,$$

montre qu'une fonction $f(z)$, holomorphe à l'intérieur d'un contour γ et sur γ, est déterminée en tout point a, intérieur à γ, dès que l'on connaît sa valeur le long du contour : c'est là une propriété des fonctions holomorphes dont le seul énoncé fait comprendre l'importance.

D'ailleurs, les valeurs que prend une telle fonction le long d'un contour, γ, ne sont pas arbitraires, puisque l'intégrale $\int_\gamma f(z)\,dz$ doit être nulle, ainsi que toute intégrale du type $\int_\gamma f(z)\varphi(z)\,dz$, $\varphi(z)$ désignant une fonction holomorphe dans γ et sur γ.

Soit au contraire $f(z)$ une fonction définie *arbitrairement* en chaque point, z, du contour γ, et continue sur ce contour.

L'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\,dz,$$

a étant intérieur à γ, définit une fonction de a évidemment bien déterminée : on reconnaît, comme plus haut, que sa dérivée est $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^2}\,dz$, et ainsi de suite; d'où l'on conclut encore que la fonction de a considérée est holomorphe à l'intérieur de γ. On aurait tort, toutefois, de la représenter par $f(a)$, car en général sa valeur, lorsque a tend vers un point z_0 du contour, ne tend pas vers $f(z_0)$.

116. Corollaire II. — Les formules (4) et (5) fournissent une limite supérieure du module des dérivées $f'(a)$, $f''(a)$, ..., *à l'intérieur* de γ.

Soient, en effet, M le maximum du module de $f(z)$ sur le contour (n° 98), δ la plus courte distance de a au contour; on a, en vertu du n° 105, 3°,

$$\operatorname{mod}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz \leq \frac{M}{\delta^{n+1}}L,$$

L étant la longueur du contour γ; d'où, par (5),

$$\operatorname{mod} f^n(a) \leq \frac{1.2\ldots n}{2\pi}\,\frac{ML}{\delta^{n+1}}.$$

Si γ est une circonférence de centre a et de rayon R, cette formule devient

$$\operatorname{mod} f^n(a) \leq \frac{1.2\ldots n}{R^n} M.$$

117. Séries à termes analytiques. — On a défini au Tome I (n° 166) la convergence uniforme d'une série à termes analytiques : on dit que la série en z

$$u_1(z)+u_2(z)+\ldots+u_n(z)+R_n(z)$$

converge uniformément dans une région R, ou sur une ligne L, lorsque, étant donné ε aussi petit qu'on veut, on peut assigner un entier N, fonction de ε seul, tel que le module du *reste*, $R_n(z)$,

soit $< \varepsilon$, pour toute valeur de n égale ou supérieure à N, et toute valeur de z dont l'affixe est dans la région R, ou sur la ligne L.

Les théorèmes suivants sont d'une grande importance dans la théorie des séries :

Soit une série $S(z) = u_1(z) + u_2(z) + \ldots$, *les* $u_n(z)$ *étant des fonctions holomorphes de* z *dans une région finie* R *de contour* γ *simple ou non, et sur ce contour.*

1° *Si la série converge uniformément sur une ligne finie* L *de la région* R, *son intégrale, le long de* L, *s'obtient en faisant la somme des intégrales des termes de la série.*

Il suffit, pour l'établir, de répéter le raisonnement fait au n° 313 du Tome I pour les séries à termes réels.

2° *Si la série converge uniformément* sur *le contour* γ, *cette série et toutes les séries obtenues en dérivant une fois, deux fois, ..., les termes de la première convergent uniformément dans toute région* R' *intérieure à* R; *chacune d'elles est la dérivée de la précédente; toutes sont des fonctions holomorphes de* z *dans* R.

On a, en effet, en désignant par x un point de R, et par $q+1$ un entier positif,

$$\frac{S(z)}{(z-x)^{q+1}} = \frac{u_1(z)}{(z-x)^{q+1}} + \frac{u_2(z)}{(z-x)^{q+1}} + \ldots.$$

La série en z au second membre converge uniformément, comme la proposée, sur le contour γ : car son reste, quand z décrit γ, a son module inférieur à $\frac{1}{\delta^{q+1}} \operatorname{mod} R_n(z)$, δ représentant la plus courte distance de x au contour. On a donc, d'après 1°, en intégrant le long de γ les deux membres de la relation précédente,

$$\int_\gamma \frac{S(z)}{(z-x)^{q+1}}\, dz = \int_\gamma \frac{u_1(z)}{(z-x)^{q+1}}\, dz + \ldots;$$

d'où, en appliquant à chacun des termes du second membre la formule (5), application légitime, puisque les $u_n(z)$ sont holomorohes dans γ et sur γ,

$$\frac{q!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{S(z)}{(z-x)^{q+1}}\, dz = u_1^{(q)}(x) + u_2^{(q)}(x) + \ldots.$$

La série des dérivées d'ordre q, $u_1^{(q)}(x) + u_2^{(q)}(x) + \ldots$, converge donc dans R; et, si $S^{(q)}(x)$ est sa somme, on a

$$(6)\qquad S^{(q)}(x) = u_1^{(q)}(x) + u_2^{(q)}(x) + \ldots = \frac{q!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{S(z)}{(z-x)^{q+1}}\,dz.$$

Je dis maintenant que la série en x, $S^{(q)}(x)$, converge uniformément dans R'. En effet, d'après la formule (5), à savoir

$$u_n^{(q)}(x) = \frac{q!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{u_n(z)}{(z-x)^{q+1}}\,dz,$$

le reste, $u_{n+1}^{(q)}(x) + \ldots$, a pour valeur $\frac{q!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{R_n(z)}{(z-x)^{q+1}}\,dz$, quantité dont le module, lorsque x demeure dans R', est inférieure à $\frac{q!}{2\pi}\frac{\mu}{d^{q+1}}L$, μ désignant le maximum du module de $R_n(z)$ sur γ, L la longueur de γ, d le minimum de la distance à γ d'un point de R' : comme μ, pour n assez grand, reste inférieur à ε, en vertu de la convergence uniforme de $S(z)$ sur γ, la proposition est établie.

En particulier, pour $q = 0$, on voit que la série $u_1(x) + u_2(x) + \ldots$ est convergente dans R, et uniformément convergente dans R'; si $S(x)$ est sa somme, on a

$$S(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{S(z)}{z-x}\,dz.$$

On reconnaît ensuite, comme au n° 115, que la dérivée de la fonction $S^{(q)}(x)$, donnée par l'intégrale qui figure au dernier membre de (6), est égale à l'intégrale qui donne $S^{(q+1)}(x)$: donc, enfin, la série proposée et les séries des dérivées successives de ses termes étant convergentes dans R, et ayant chacune la suivante pour dérivée, sont des fonctions holomorphes de x, dans la région R. C. Q. F. D.

Remarque. — Cette théorie permet de démontrer à nouveau certaines propositions établies au Tome I pour les séries de puissances.

Une telle série, en effet, comme on l'a vu, converge uniformément à l'intérieur et sur le contour de toute circonférence γ intérieure au cercle de convergence; donc, d'après ce qui précède, la série formée par les dérivées d'ordre q de ses termes converge uniformément dans toute région intérieure à γ; chacune de ces

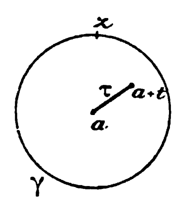
séries est la dérivée de la précédente, et toutes sont des fonctions holomorphes dans et sur γ, c'est-à-dire *dans* le cercle de convergence, la circonférence de ce cercle pouvant être exceptée.

IV. — DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIE.

---

118. Série de Taylor. — Soit $f(z)$ une fonction holomorphe à l'intérieur et sur le contour d'une circonférence γ de rayon R, ayant pour centre le point $z = a$; désignons par $a + t$ un point

Fig. 53.



intérieur à ce cercle. On a, d'après la formule de Cauchy (n° **113**),

$$f(a+t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a-t}\,dz,$$

ce qui s'écrit identiquement :

$$f(a+t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\,dz\left[\frac{1}{z-a} + \frac{t}{(z-a)^2} + \ldots + \frac{t^{n-1}}{(z-a)^n} + \frac{t^n}{(z-a)^n(z-a-t)}\right],$$

ou

$$f(a+t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\,dz + \frac{t}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^2}\,dz + \ldots + \frac{t^{n-1}}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^n}\,dz + R_n.$$

On peut écrire, d'après les formules du n° **114**,

$$(7) \qquad f(a+t) = f(a) + tf'(a) + \ldots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(a) + R_n,$$

le reste R_n ayant pour expression

$$R_n = \frac{t^n}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\frac{dz}{(z-a)^n(z-a-t)};$$

je dis qu'il tend vers zéro pour n infini.

Soient, en effet, M le maximum du module de $f(z)$ sur la circonférence γ, τ le module de t : le point z étant sur γ, $\mathrm{mod}(z-a)$ est égal à R, $\mathrm{mod}(z-a-t)$ est au moins égal à $R-\tau$; et l'on a, dès lors (n° 105, 3°),

$$\begin{aligned}\mathrm{mod}\, R_n &\leq \frac{1}{2\pi}\,\frac{M\tau^n}{R^n(R-\tau)}\,2\pi R\\ &\leq \frac{RM}{R-\tau}\left(\frac{\tau}{R}\right)^n.\end{aligned}$$

Le dernier membre a pour limite zéro pour n infini, car τ est inférieur à R, puisque le point $a+t$ est à l'intérieur du cercle γ.

La série qui figure au second membre de (7), prolongée indéfiniment, est donc convergente et représente $f(a+t)$, à la seule condition que le point $a+t$ soit intérieur au cercle. C'est la *série de Taylor* étendue par Cauchy aux fonctions analytiques.

En posant $z = a+t$, d'où $t = z-a$, on peut écrire aussi

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} f(z) = {} & f(a)+(z-a)f'(a)\\ & + \frac{(z-a)^2}{1.2}f''(a)+\ldots+\frac{(z-a)^n}{n!}f^n(a)+\ldots,\end{aligned}\right.$$

développement valable à la seule condition que le point z soit intérieur au cercle de centre a, dans lequel $f(z)$ est holomorphe. D'ailleurs, ce développement, étant une série de puissances, est absolument et uniformément convergent dans tout cercle intérieur au précédent.

119. La *série de Maclaurin* s'obtient en faisant $a = 0$: toute fonction $f(z)$, holomorphe dans un cercle décrit de l'origine comme centre, peut donc se développer en série convergente, ordonnée suivant les puissances croissantes de z, pour toutes les valeurs de z intérieures à ce cercle :

$$f(z) = f(0)+zf'(0)+\ldots+\frac{z^n}{n!}f^n(0)+\ldots.$$

120. Remarque. — D'après cela, si le point a est un point ordinaire (c'est-à-dire non critique) de $f(z)$, on peut développer $f(z)$ par la formule (8), pour toutes les valeurs de z comprises à l'intérieur d'un cercle (cercle de Taylor) ayant pour centre a et pour rayon la distance de ce point au point critique le plus voisin : car, à l'intérieur de ce cercle, $f(z)$ n'a pas de point critique et reste holomorphe. Sur le cercle même, il y a doute ; la série peut n'être pas convergente.

Au delà du cercle, la série est certainement divergente : car cette série est une série de puissances ; si donc elle convergeait pour un point M plus éloigné de a que le point critique le plus voisin de la fonction $f(z)$, elle convergerait certainement à l'intérieur de la circonférence ayant a pour centre et passant par M, d'après les propriétés des séries de puissances (Tome I, nos **141**, **142**). Elle serait donc, toujours d'après ces propriétés (n° 99), holomorphe dans ce cercle, ce qui est impossible, puisque, par hypothèse, le cercle contient un point critique.

On sait ainsi fixer *d'une manière exacte*, pour une fonction donnée, le rayon du cercle à l'intérieur duquel converge la série de Taylor ou de Maclaurin, et l'on voit que l'introduction des imaginaires est *indispensable,* puisque le point critique le plus voisin de a peut être imaginaire. Par exemple, la fonction $\sqrt{1+x^2}$ ne peut être développée en série de Maclaurin convergente, même pour des valeurs réelles de x, que si mod x reste inférieur à 1 : les points critiques de la fonction $\sqrt{1+z^2}$ sont en effet $+i$ et $-i$ (n° **100**).

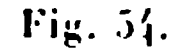
Pour $\log(1+z)$, l'origine est un point ordinaire, les points critiques se réduisent au seul point $z=-1$: la série de Maclaurin est donc convergente si mod $z<1$; de même pour la fonction $\frac{1}{\cos z}$ la série de Maclaurin converge si mod $z<\frac{\pi}{2}$, car les points critiques de $\frac{1}{\cos z}$ sont des pôles, zéros de $\cos z$, $\frac{\pi}{2}+k\pi$ [1].

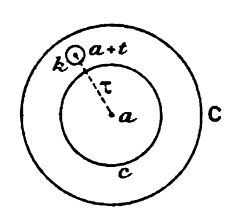
---

[1] Le quotient $f(z):\varphi(z)$ de deux fonctions analytiques est développable, autour d'un point ordinaire a, en série de Taylor convergente dans un cercle ayant pour centre a, et pour rayon la distance de ce point au point critique le plus voisin : ces points critiques du quotient sont ceux de f et de φ, et aussi les zéros de φ.

121. Série de Laurent. — Laurent a étendu la théorie précédente.

Soit $f(z)$ une fonction holomorphe à l'intérieur et sur le pourtour d'une couronne circulaire, comprise entre deux circonférences C et c, de même centre a, de rayons R et r. Désignons


Fig. 54.



par $a+t$ un point de la couronne; si nous entourons ce point d'une petite circonférence k, la fonction $\frac{f(z)}{z-a-t}$ sera holomorphe dans la région comprise entre les trois circonférences, et l'on aura, d'après le théorème de Cauchy pour une région à contour non simple (n° 108),

$$\int_C \frac{f(z)}{z-a-t}\,dz = \int_c + \int_k,$$

les trois circonférences étant décrites dans le sens positif. Or, en vertu de la formule de l'intégrale de Cauchy (n° 113),

$$\int_k \frac{f(z)}{z-a-t}\,dz = 2\pi i f(a+t);$$

d'où

$$2\pi i f(a+t) = \int_C \frac{f(z)}{z-a-t}\,dz - \int_c \frac{f(z)}{z-a-t}\,dz.$$

Sur la circonférence C, le module de $z-a$ étant supérieur à celui de t, écrivons

$$\frac{1}{z-a-t} = \frac{1}{z-a} + \frac{t}{(z-a)^2} + \dots + \frac{t^{n-1}}{(z-a)^n} + \frac{t^n}{(z-a)^n(z-a-t)};$$

sur la circonférence c, $\operatorname{mod}(z-a)$ étant inférieur à $\operatorname{mod} t$, écrivons

$$-\frac{1}{z-a-t} = \frac{1}{t-(z-a)} = \frac{1}{t} + \frac{z-a}{t^2} + \dots + \frac{(z-a)^{n-1}}{t^n} + \frac{(z-a)^n}{t^n[t-(z-a)]};$$

et portons ces valeurs dans l'expression de $2\pi i f(a+t)$. Il vient :

$$\begin{aligned}2\pi i f(a+t) = &\int_C \frac{f(z)}{z-a}\,dz + t\int_C \frac{f(z)}{(z-a)^2}\,dz + \ldots\\ &+ t^{n-1}\int_C \frac{f(z)}{(z-a)^n}\,dz + R_n\\ &+ \frac{1}{t}\int_c f(z)\,dz + \frac{1}{t^2}\int_c (z-a)f(z)\,dz + \ldots\\ &+ \frac{1}{t^n}\int_c (z-a)^{n-1}f(z)\,dz + r_n.\end{aligned}$$

On voit aisément que les modules des deux termes complémentaires, R_n et r_n, ont pour limite zéro, pour n infini : soient en effet M le maximum du module de $f(z)$ sur la couronne, τ le module de t, on a

$$\operatorname{mod} R_n = \operatorname{mod}\int_C f(z)\frac{t^n}{(z-a)^n(z-a-t)}\,dz \leqq M\left(\frac{\tau}{R}\right)^n \frac{2\pi R}{R-\tau},$$

$$\operatorname{mod} r_n = \operatorname{mod}\int_c f(z)\frac{(z-a)^n}{t^n[t-(z-a)]}\,dz \leqq M\left(\frac{r}{\tau}\right)^n \frac{2\pi r}{\tau - r},$$

et les seconds membres tendent vers zéro, pour n infini, puisque $r < \tau < R$.

On a ainsi développé $2\pi i f(a+t)$, et, par suite, $f(a+t)$, en une double série convergente, ordonnée suivant les puissances positives et négatives de t, de la forme

$$f(a+t) = A_0 + A_1 t + \ldots + A_n t^n + \ldots + \frac{B_1}{t} + \ldots + \frac{B_n}{t^n} + \ldots;$$

les A et B sont des constantes par rapport à t, représentées par des intégrales définies :

$$A_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz \text{ [1]},$$

$$B_n = \frac{1}{2\pi i}\int_c f(z)(z-a)^{n-1}\,dz.$$

---

[1] Au lieu de prendre, pour A_n, $\frac{1}{2\pi i}\int_C$, on peut prendre $\frac{1}{2\pi i}\int_c$, car la fonction $\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}$ est holomorphe dans la couronne circulaire : donc (n° 108) $\int_C = \int_c$. De même, au lieu de $\int_C$ ou $\int_c$, on peut prendre $\int_\sigma$, σ étant une circonférence concentrique à C et c, et de rayon intermédiaire.

Ce développement est convergent si le point $(a+t)$ est dans la couronne.

On peut écrire aussi, en posant $a+t=z$, d'où $t=z-a$,

$$(9)\quad \begin{cases} f(z) = A_0 + A_1(z-a) + \ldots + A_n(z-a)^n + \ldots \\ \quad + \dfrac{B_1}{z-a} + \ldots \quad + \dfrac{B_n}{(z-a)^n} + \ldots, \end{cases}$$

les deux séries étant convergentes pour toutes les valeurs de z à l'intérieur de la couronne : on reconnaît, comme dans l'étude des séries de puissances ordinaires, qu'elles sont *absolument* convergentes dans la couronne, et *uniformément* convergentes dans toute couronne concentrique et intérieure à la première.

122. L'application la plus importante de la série de Laurent est le développement en série d'une fonction $f(z)$ autour d'un point singulier essentiel isolé a : en effet, décrivons de a comme centre un cercle C, ne contenant aucun autre point critique (ce qui est possible, *puisque a est un point critique isolé*); soit c une circonférence de centre a, intérieure à C et de rayon aussi petit qu'on veut. La fonction $f(z)$ est holomorphe dans la couronne comprise entre les deux circonférences, d'où le développement :

$$\begin{aligned} f(z) &= A_0 + A_1(z-a) + \ldots + A_n(z-a)^n + \ldots \\ &\quad + \frac{B_1}{z-a} + \ldots + \frac{B_n}{(z-a)^n} + \ldots, \end{aligned}$$

applicable à toutes les valeurs de z comprises dans le cercle C, le point a excepté.

123. Exemple. — La fonction $f(z)=e^{\frac{1}{z^2}}$ admet l'origine $z=0$ comme point essentiel; le rayon du cercle C est alors aussi grand que l'on veut, c'est-à-dire que la série de Laurent est valable dans tout le plan, le point $z=0$ excepté. On a effectivement, par le développement classique de e^u,

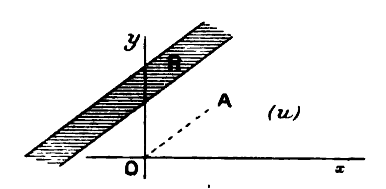
$$e^{\frac{1}{z^2}} = 1 + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{1.2}\frac{1}{z^4} + \frac{1}{1.2.3}\frac{1}{z^6} + \ldots,$$

ce qui est bien une série de Laurent, réduite aux termes à puissances négatives, et qui converge, en vertu des propriétés de l'exponentielle, pour toute valeur de z, sauf $z=0$.

124. Série de Fourier. — C'est une transformée de celle de Laurent, dans le cas d'une fonction périodique.

Soient $\omega = a + bi$ une quantité quelconque; A son affixe, c'est-à-dire le point de coordonnées rectangulaires a et b. Désignons par $f(u)$ une fonction de u holomorphe dans la région indéfinie, R, comprise entre deux parallèles quelconques à OA, et

Fig. 55.



supposons de plus que, dans cette région, $f(u)$ admette la période ω, c'est-à-dire qu'on ait $f(u+\omega) = f(u)$: il est clair que les points u et $u+\omega$ sont sur une même parallèle à OA.

Posons maintenant

$$e^{2i\pi\frac{u}{\omega}} = z, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad u = \frac{\omega}{2i\pi}\log z,$$

et cherchons dans quelle région *du plan de la variable* z reste le point z, lorsque le point u reste dans R.

Le long d'une parallèle à OA, u est évidemment de la forme

$$u = u_0 + \lambda\omega,$$

λ étant réel et variant de $-\infty$ à $+\infty$: donc, aux points u de cette parallèle, correspondent les points z donnés par l'équation

$$z = e^{2i\pi\frac{u_0}{\omega}} e^{2i\pi\lambda},$$

et comme le module du second membre est indépendant de λ, puisque le module de $e^{2i\pi\lambda}$, ou $\cos 2\pi\lambda + i \sin 2\pi\lambda$, est l'unité, les points z considérés sont sur une circonférence ayant l'origine pour centre. Par suite, à la région R du plan (u) répond, dans le plan (z), une couronne circulaire R' ayant l'origine pour centre.

Je dis maintenant que $f(u)$, considérée comme fonction de z, c'est-à-dire $f\left(\frac{\omega}{2i\pi}\log z\right)$, est fonction holomorphe de z dans la

couronne R′ et sur son pourtour. En effet, ses seuls points critiques possibles dans R′ sont (n° 100) : 1° les valeurs de z auxquelles correspondent, par $u = \frac{\omega}{2i\pi}\log z$, des valeurs de u critiques pour $f(u)$ dans la région R, et il n'existe pas de telles valeurs, puisque $f(u)$ n'a pas de point critique dans R; 2° les valeurs de z critiques pour $\log z$, c'est-à-dire $z = 0$, point en dehors de R′. La fonction considérée admet donc comme point ordinaire tout point de la couronne R′; pour prouver qu'elle y est holomorphe, il suffit évidemment d'établir qu'elle y est uniforme.

Or, en un point z_0 de R′, $\log z$ peut prendre une infinité de valeurs, différant entre elles de $2k\pi i$; les valeurs correspondantes de $f\left(\frac{\omega}{2i\pi}\log z\right)$ sont comprises dans la formule $f\left(\frac{\omega}{2i\pi}\log z_0 + k\omega\right)$, et sont *identiques entre elles*, puisque $f(u)$ admet la période ω. La fonction considérée n'ayant ainsi qu'une valeur pour une valeur donnée de z est uniforme, et, par suite, holomorphe, dans la couronne R′, de centre $z = 0$.

On peut, dès lors, lui appliquer, dans cette couronne, le développement de Laurent, suivant les puissances croissantes de z :

$$(10)\qquad f\left(\frac{\omega}{2i\pi}\log z\right) = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \ldots + \frac{B_1}{z} + \frac{B_2}{z^2} + \ldots,$$

série qui converge absolument et uniformément dans toute couronne intérieure à R′.

Revenons maintenant de z à u, par $z = e^{2i\pi\frac{u}{\omega}}$; il vient, en disposant autrement les termes,

$$(11)\qquad \begin{cases} f(u) = \ldots\ldots + B_n e^{-2ni\pi\frac{u}{\omega}} + \ldots + B_1 e^{-2i\pi\frac{u}{\omega}} \\ \qquad + A_0 + A_1 e^{2i\pi\frac{u}{\omega}} + \ldots + A_n e^{2ni\pi\frac{u}{\omega}} + \ldots, \end{cases}$$

développement absolument et uniformément convergent dans toute bande parallèle et intérieure à R.

De là cette conclusion :

Une fonction de u, $f(u)$, de période ω, holomorphe dans la bande comprise entre deux droites parallèles faisant avec l'axe des quantités réelles un angle égal à l'argument de ω, est développable en une série ordonnée suivant les puissances en-

tières, négatives et positives, de l'exponentielle $e^{2i\pi\frac{u}{\omega}}$; *cette série est absolument et uniformément convergente dans toute bande parallèle et intérieure à la bande donnée.*

Pour $\omega = 2\pi$, on retrouve évidemment une série de même forme que celle de Fourier (Tome I, n° 331), après substitution à $e^{\pm niu}$ de sa valeur, $\cos nu \pm i \sin nu$.

V. — APPLICATIONS DU DÉVELOPPEMENT DE TAYLOR.

---

125. Théorème de Liouville. — *Une fonction holomorphe dans tout le plan, et dont le module reste constamment inférieur à une limite* M, *se réduit nécessairement à une constante.*

La fonction étant holomorphe dans tout le plan, la série de Taylor est applicable pour toute valeur de a et de t; par suite :

$$(12) \qquad f(a+t) = f(a) + tf'(a) + \ldots + \frac{t^n}{n!} f^n(a) + \ldots.$$

Décrivons de a comme centre un cercle de rayon arbitraire R; on a (n° 116), puisque M est le maximum dans le module de $f(z)$ *dans tout le plan,*

$$\operatorname{mod} f^n(a) \leqq \frac{1.2\ldots n}{R^n} M,$$

quelque grand que soit R. Or, M étant fixe, le second membre de cette inégalité tend vers zéro pour R infini; donc toutes les dérivées $f'(a)$, $f''(a)$, ... sont nulles, et il reste, dans (12),

$$f(a+t) = f(a). \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

126. Zéros d'une fonction holomorphe. — Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans une région du plan, s'annulant pour un point a de cette région; on a, par la formule de Taylor (8),

$$(13) \qquad f(z) = f(a) + (z-a)f'(a) + \ldots,$$

développement valable quand z est intérieur à un cercle γ (*cercle de Taylor*) de centre a. Par hypothèse, $f(a)$ est nul; supposons que $f'(a)$, $f''(a)$, ..., $f^{m-1}(a)$ le soient aussi, et que $f^m(a)$ ne le

soit pas; il reste

$$f(z) = (z-a)^m \left[\frac{f^m(a)}{m!} + (z-a)\frac{f^{m+1}(a)}{(m+1)!} + \ldots \right] = (z-a)^m \varphi(z),$$

et $\varphi(a)$, à savoir $\frac{f^m(a)}{m!}$, est différent de zéro.

D'ailleurs, $\varphi(z)$ est une série de puissances qui converge dans γ, car, par hypothèse, $(z-a)^m \varphi(z)$ y converge, et, pour $z = a$, $\varphi(z)$ a une valeur finie. Donc (n° 99), $\varphi(z)$ est holomorphe à l'intérieur de γ.

On dit que le point a est un zéro de la fonction $f(z)$, et que m est son *degré*, ou *ordre*, de multiplicité : par ce qui précède, m est nécessairement un entier positif, et, pour que a soit zéro d'ordre m d'une fonction holomorphe $f(z)$, il faut et il suffit que $f(z)$ et ses $(m-1)$ premières dérivées s'annulent pour $z = a$.

Exemple. — Nous savons (Tome I, n° 158, Corollaire 1°) que les zéros de $\sin z$ sont les points $z = k\pi$; ce sont des zéros simples, car la dérivée, $\cos z$, ne s'y annule pas.

127. **Corollaire.** — Les zéros d'une fonction holomorphe (dans la région où elle est holomorphe) sont isolés; c'est-à-dire que l'on peut entourer chacun d'eux d'un cercle assez petit pour ne contenir aucun autre zéro.

Reprenons, en effet, la fonction $f(z)$ et le point a; soit ε un nombre positif, inférieur à $\operatorname{mod}\varphi(a)$: un tel nombre existe, puisque $\varphi(a)$ n'est pas nul. La fonction $\varphi(z)$, étant holomorphe dans γ, est continue pour $z = a$, et son module l'est aussi (n° 98); on peut donc trouver un nombre ρ assez petit pour que, z restant dans le cercle de centre a et de rayon ρ, $\operatorname{mod}\varphi(z)$ reste compris entre les deux quantités *positives* $\operatorname{mod}\varphi(a) - \varepsilon$ et $\operatorname{mod}\varphi(a) + \varepsilon$. Dès lors $\operatorname{mod}\varphi(z)$ ne s'annule pas dans ce cercle, c'est-à-dire que $\varphi(z)$ ne s'y annule pas; et comme on a $f(z) = (z-a)^m \varphi(z)$, le cercle considéré ne contient aucun autre zéro de $f(z)$ que le zéro a [1]. C. Q. F. D.

---

[1] Ce raisonnement suppose $\varphi(a)$ différent de zéro, ce qui est toujours admissible, à moins que toutes les dérivées de $f(z)$ ne s'annulent pour $z = a$. En ce cas, $f(z)$ est identiquement nul dans le cercle γ, en vertu de (13). Si donc on trouve qu'une fonction holomorphe admet un zéro aussi voisin que l'on veut d'un zéro donné a, on en conclura qu'elle est identiquement nulle dans le cercle de Taylor ayant pour centre a.

On en conclut que, dans une région *finie* du plan, les zéros de $f(z)$ sont en nombre limité.

128. Zéros d'une fonction méromorphe. — Considérons une fonction $f(z)$ méromorphe dans une région R; soit a un de ses zéros dans R. On peut entourer a d'un cercle γ, assez petit pour ne contenir aucun pôle de $f(z)$; sinon, il y aurait un pôle aussi voisin qu'on voudrait de a, de sorte que la fonction deviendrait infinie en un point aussi voisin qu'on voudrait d'un point où elle s'annule : ce point serait dès lors un point d'indétermination, c'est-à-dire un point singulier essentiel, cas exclu, puisque $f(z)$, méromorphe, n'a, dans R, que des pôles.

Dans le cercle γ, qui ne contient pas de pôle, la fonction méromorphe $f(z)$ est holomorphe : la série de Taylor s'applique donc, ainsi que toutes les conclusions précédentes. Les zéros, situés dans R, de la fonction méromorphe $f(z)$ sont donc d'ordre entier: ces zéros sont isolés, et autour de l'un d'eux, a, $f(z)$ peut se mettre sous la forme $(z-a)^m\varphi(z)$, $\varphi(z)$ étant holomorphe au voisinage de a et ne s'annulant pas pour $z=a$.

129. Pôles d'une fonction méromorphe. — Les pôles d'une fonction méromorphe dans la région où elle est méromorphe, sont isolés, car ce sont les zéros de la fonction inverse, qui est méromorphe dans la même région (n° 102). Il en résulte qu'une fonction, méromorphe dans une région *finie* du plan, n'a dans cette région qu'un nombre limité de zéros et de pôles.

Si $f(z)$ a un pôle au point a, la fonction $\frac{1}{f(z)}$, par définition, est holomorphe dans un cercle γ, décrit de a comme centre et s'annule pour $z=a$. Donc, d'après ce qui précède, on a

$$\frac{1}{f(z)}=(z-a)^n\psi(z),$$

n désignant un entier positif, et $\psi(z)$ une fonction holomorphe dans le cercle γ, ne s'annulant pas pour $z=a$.

On en tire

$$f(z)=\frac{1}{(z-a)^n}\,\frac{1}{\psi(z)}.$$

D'ailleurs $\psi(z)$ étant holomorphe dans γ, et ne s'annulant pas

pour $z = a$, $\frac{1}{\psi(z)}$ sera holomorphe dans un cercle γ', de centre a, ayant pour rayon la distance du point a au point critique le plus voisin de $\frac{1}{\psi(z)}$, c'est-à-dire au point critique de $f(z)$ le plus voisin de a. Donc, par la série de Taylor, on aura, dans ce cercle γ',

$$\frac{1}{\psi(z)} = A_0 + A_1(z-a) + \ldots + A_{n-1}(z-a)^{n-1} + A_n(z-a)^n + \ldots,$$

ce qui donne

$$(14)\quad \begin{cases} f(z) = \dfrac{A_0}{(z-a)^n} + \dfrac{A_1}{(z-a)^{n-1}} + \ldots + \dfrac{A_{n-1}}{z-a} \\ \qquad\qquad + A_n + A_{n+1}(z-a) + \ldots. \end{cases}$$

C'est le *développement d'une fonction méromorphe aux environs d'un pôle*, formule importante d'un fréquent usage; comme on vient de le dire, elle est valable à l'intérieur d'un cercle γ', ayant pour centre a et pour rayon la distance de ce point au point critique le plus voisin de la fonction $f(z)$.

L'entier n est dit *degré* (*ou ordre*) *de multiplicité du pôle* a; les n premiers termes du développement (14) forment ce qu'on nomme la *partie infinie* du développement de $f(z)$ autour du pôle a, ou encore le *développement polaire* de $f(z)$ autour de ce pôle.

Remarque. — Le quotient de deux fonctions $f(z)$ et $F(z)$, méromorphes dans une région R, est méromorphe dans R : on l'a établi au n° **102**, en laissant de côté le cas où $f(z)$ et $F(z)$ auraient un zéro ou un pôle commun, a. Mais, dans cette dernière hypothèse, en vertu des relations

$$f(z) = (z-a)^m \varphi(z), \qquad F(z) = (z-a)^n \Phi(z),$$

si a est un zéro de f et de F, ce sera un point ordinaire ou un pôle pour le quotient $f(z) : F(z)$, selon que $m \geqq n$, ou $m < n$. Même conclusion pour un pôle commun. La proposition en question est donc générale.

130. Résidu. — Parmi les coefficients des termes en $\frac{1}{(z-a)^k}$, dans le développement polaire de $f(z)$, celui de $\frac{1}{z-a}$, que nous

avons désigné par A_{n-1}, joue un rôle spécial : il a reçu de Cauchy le nom de *résidu* de $f(z)$ relatif au pôle a.

Si a est un point essentiel de $f(z)$, on nomme aussi *résidu* le coefficient de $\frac{1}{z-a}$ dans le développement de $f(z)$ autour de a, par la formule de Laurent.

131. Remarque I. — Le développement (14) de $f(z)$ est valable dans le cercle γ', c'est-à-dire que la série de puissances

$$A_n + A_{n+1}(z-a) + A_{n+2}(z-a)^2 + \ldots$$

converge dans ce cercle : dès lors on peut écrire

$$(15) \qquad f(z) = \frac{A_0}{(z-a)^n} + \frac{A_1}{(z-a)^{n-1}} + \ldots + \frac{A_{n-1}}{z-a} + \varphi(z),$$

$\varphi(z)$, c'est-à-dire la série de puissances ci-dessus, étant une fonction holomorphe de z dans le cercle γ' (n° **99**).

La dérivée de la série de puissances $\varphi(z)$ est la série des dérivées des termes, la nouvelle série ayant encore le même cercle de convergence (Tome I, n^{os} **145** et **143**); on a donc

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} f'(z) &= -\frac{nA_0}{(z-a)^{n+1}} - \ldots - \frac{A_{n-1}}{(z-a)^2} + \varphi'(z) \\ &= \frac{-nA_0}{(z-a)^{n+1}} - \ldots - \frac{A_{n-1}}{(z-a)^2} + A_{n+1} + 2A_{n+2}(z-a) + \ldots, \end{aligned} \right.$$

c'est-à-dire qu'on obtient la dérivée du développement (14) en dérivant séparément chaque terme. Le nouveau développement est valable dans le même cercle que l'ancien.

La relation (16) montre qu'un pôle d'ordre n de $f(z)$ est pôle d'ordre $(n+1)$ de $f'(z)$, et d'ordre $n+p$ de $f^{(p)}(z)$.

132. Remarque II. — La dérivée d'une fonction holomorphe dans une région est holomorphe dans la même région (n° **115**); sous une autre forme, la dérivée d'une fonction de z, $f(z)$, qui a un nombre limité de points critiques dans une région, ne peut admettre d'autres points critiques que ceux de la fonction. En particulier, si $f(z)$ est méromorphe dans une région R, sa dérivée $f'(z)$ ne peut avoir, dans R, d'autres points critiques que les pôles de $f(z)$; d'après ce qui précède, ces pôles sont aussi des

pôles de $f'(z)$, qui, dès lors, est méromorphe dans R. Donc :

La dérivée d'une fonction $f(z)$, méromorphe dans une région, est méromorphe dans la même région; ses pôles sont ceux de $f(z)$; un pôle d'ordre n de $f(z)$ est d'ordre $(n+1)$ pour $f'(z)$.

133. Le développement d'une fonction $f(z)$, autour d'un point ordinaire ou d'un pôle a, suivant les puissances croissantes de $(z-a)$, est unique.

Considérons d'abord le cas d'un point ordinaire a, et supposons qu'on ait, d'une manière quelconque, mis $f(z)$ sous la forme :

$$(17)\quad f(z) = A_0 + A_1(z-a) + \ldots + A_{n-1}(z-a)^{n-1} + (z-a)^n R(z),$$

$R(z)$ ne devenant pas infini pour $z=a$. En vertu même de cette équation, la fonction $R(z)$, c'est-à-dire

$$[f(z) - A_0 - \ldots - A_{n-1}(z-a)^{n-1}]\frac{1}{(z-a)^n},$$

est méromorphe autour de a : mais comme elle reste finie pour $z=a$, a est pour elle un point ordinaire (n° 129, *Remarque*); aucune de ses dérivées ne devient donc infinie pour $z=a$. Alors, en faisant $z=a$ dans (17) et dans les relations qu'on obtient en prenant les dérivées successives des deux membres par rapport à z, jusqu'à l'ordre $n-1$ inclus, il vient

$$A_0 = f(a),\quad A_1 = f'(a),\quad A_2 = \frac{f''(a)}{1.2},\quad \ldots,\quad A_{n-1} = \frac{f^{n-1}(a)}{1.2\ldots(n-1)},$$

ce qui montre que $A_0, \ldots, A_{n-1}$ sont les coefficients ordinaires de la série de Taylor autour du point a.

La même conclusion s'applique dans le cas où a est un pôle d'ordre m; il suffit alors de considérer la fonction $(z-a)^m f(z)$, qui est holomorphe autour de a.

Corollaires. — 1° Soient $f(z)$ et $\varphi(z)$ deux fonctions holomorphes autour du point a, et supposons d'abord $\varphi(a) \gtrless 0$. Il résulte de ce qui précède que, pour obtenir le développement taylorien du quotient $f(z) : \varphi(z)$, jusqu'au terme en $(z-a)^{n-1}$ inclus, on n'aura qu'à diviser l'un par l'autre (suivant les puissances

croissantes de $z - a$) les développements :

$$f(z) = f(a) + (z - a) f'(a) + \ldots + (z - a)^{n-1} \frac{f^{n-1}(a)}{(n-1)!},$$
$$\varphi(z) = \varphi(a) + \ldots$$

réduits à leurs n premiers termes : les n premiers termes du quotient seront aussi ceux du développement taylorien cherché, car la division indiquée conduit, pour $f(z) : \varphi(z)$, à une relation de la forme (17).

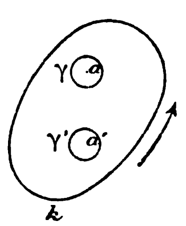
2° Si a est pôle d'ordre m de $\varphi(z)$, pour obtenir *le développement polaire,* autour du point a, de la fonction $f(z) : \varphi(z)$, on divisera encore l'un par l'autre les développements tayloriens de $f(z)$ et $\varphi(z)$, réduits à leurs m premiers termes, en ordonnant la division suivant les puissances croissantes de $z - a$: les m premiers termes du quotient donneront l'expression cherchée.

Il sera plus simple, afin d'abréger l'écriture, de poser $z - a = t$, et de développer suivant les puissances de t.

3° Si a est zéro simple de $\varphi(z)$, le résidu de $f(z) : \varphi(z)$ autour du pôle a sera, d'après cela, égal à $f(a) : \varphi'(a)$, résultat à retenir.

134. Théorème des résidus. — Soit $f(z)$ une fonction méromorphe à l'intérieur d'un contour simple k; désignons par $a, a', \ldots$, ceux de ses pôles intérieurs à k, et entourons-les de petits cercles $\gamma, \gamma', \ldots$ (*fig.* 56), la fonction $f(z)$ étant holomorphe

Fig. 56.



dans la région à contour non simple comprise entre k et les circonférences $\gamma, \gamma', \ldots$, on aura, d'après le théorème de Cauchy étendu (n° 108),

$$\int_k f(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz + \int_{\gamma'} f(z)\,dz + \ldots,$$

tous les contours étant décrits dans le même sens, que nous supposerons le sens positif.

Or, au voisinage du pôle a (n° 131), on a

$$f(z) = \frac{A_0}{(z-a)^n} + \ldots + \frac{A_{n-1}}{z-a} + \varphi(z),$$

$\varphi(z)$ étant holomorphe autour du point a; par suite

$$(1) \quad \int_\gamma f(z)\,dz = A_0 \int_\gamma \frac{dz}{(z-a)^n} + \ldots + A_{n-1} \int_\gamma \frac{dz}{z-a} + \int_\gamma \varphi(z)\,dz.$$

L'intégrale $\int_\gamma \varphi(z)\,dz$ est nulle, puisque $\varphi(z)$ est holomorphe dans le cercle γ; d'ailleurs (n° 111) pour $p > 1$,

$$\int_\gamma \frac{dz}{(z-a)^p} = -\frac{1}{p-1}\left[\frac{1}{(z-a)^{p-1}}\right],$$

et comme le second reprend la même valeur quand on revient au point de départ de l'intégration, puisque p est entier, l'intégrale est nulle. Pour $p = 1$, on a (n° 112)

$$\int_\gamma \frac{dz}{z-a} = 2\pi i,$$

le contour γ étant décrit dans le sens positif.

Il reste donc, dans (1),

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i\, A_{n-1},$$

et, par suite,

$$\int_k f(z)\,dz = 2\pi i (A_{n-1} + A'_{n'-1} + \ldots),$$

A_{n-1}, $A'_{n'-1}$, ... étant les résidus de $f(z)$ relatifs aux pôles a, a', ...

Donc :

L'intégrale d'une fonction méromorphe, prise dans le sens positif le long d'un contour simple k, est égale à la somme des résidus de cette fonction, relatifs aux pôles situés à l'intérieur du contour, multipliée par $2\pi i$.

Un théorème analogue s'applique si la fonction a des points essentiels isolés à l'intérieur du contour.

135. **Théorème de Cauchy sur les zéros et les pôles.** — Soit $f(z)$ une fonction méromorphe à l'intérieur d'un contour simple k; désignons par $f'(z)$ sa dérivée qui est également méromorphe dans cette région (n° 132), et par $\varphi(z)$ une fonction holomorphe à l'intérieur de k et sur k. L'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_k \frac{f'(z)}{f(z)}\varphi(z)\,dz,$$

prise dans le sens positif, est égale, d'après le théorème des résidus, à la somme des résidus de la fonction $\frac{f'(z)}{f(z)}\varphi(z)$, relatifs aux pôles situés à l'intérieur du contour. Cette fonction ne peut devenir infinie que pour les zéros de son dénominateur $f(z)$, ou pour les pôles de son numérateur $f'(z)\varphi(z)$.

Or $\varphi(z)$, par hypothèse, est holomorphe à l'intérieur du contour k (et sur ce contour), et n'a dès lors pas de pôle dans k; quant aux pôles de $f'(z)$ ce sont uniquement les pôles de $f(z)$ (n° 132). Donc finalement les pôles cherchés de $\frac{f'(z)}{f(z)}\varphi(z)$ ne peuvent être que les zéros et les pôles de $f(z)$, situés à l'intérieur du contour.

Soit a l'un d'eux; on a, au voisinage de a (n°s 126 et 128),

$$f(z) = (z-a)^m\psi(z),$$

$\psi(z)$ n'étant ni nulle ni infinie pour $z=a$, et étant holomorphe autour de ce point; m désigne un entier, *positif si a est un zéro de* $f(z)$, *négatif si c'est un pôle.* Cherchons le résidu de $\frac{f'(z)}{f(z)}\varphi(z)$ pour $z=a$.

On a, en dérivant logarithmiquement la relation précédente,

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z-a} + \frac{\psi'(z)}{\psi(z)}$$

et

$$\varphi(z)\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z-a}\varphi(z) + \frac{\psi'(z)}{\psi(z)}\varphi(z).$$

Le second terme du dernier membre est fini pour $z=a$,

puisque $\psi(z)$, et par suite $\psi'(z)$, est holomorphe autour du point a, et que $\psi(a)$ n'est pas nul; le résidu du premier membre, relatif au pôle a, est donc le même que celui de $\frac{m}{z-a}\varphi(z)$, égal évidemment à $m\varphi(a)$. Donc enfin, on obtient la formule de Cauchy :

$$\frac{1}{2\pi i}\int_k \varphi(z)\frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum m\varphi(a) = \sum \varphi(\alpha) - \sum \varphi(\beta),$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ étant les zéros; $\beta_1, \beta_2, \ldots$ les pôles de $f(z)$, intérieurs au contour k. Dans la somme $\sum \varphi(\alpha)$, chaque zéro figure autant de fois qu'il y a d'unités dans son ordre de multiplicité, et de même pour les pôles. Cette formule donne donc la différence des deux sommes $\sum \varphi(z)$ étendues respectivement aux zéros et aux pôles d'une fonction méromorphe, situés à l'intérieur d'un contour donné.

Corollaire. — Si $\varphi(z) = 1$, on aura la formule

$$\frac{1}{2\pi i}\int_k \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \text{M} - \text{N},$$

M étant le nombre des zéros de $f(z)$, N celui des pôles intérieurs à k, chacun d'eux étant compté avec son ordre de multiplicité [1].

---

[1] Si la fonction holomorphe $f(z)$ admet a comme zéro d'ordre m, on peut entourer a d'une petite circonférence γ, ne contenant pas d'autre zéro de $f(z)$. La fonction de u, $\theta(u) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)-u}dz$, où u désigne un paramètre, est continue pour $u = 0$: car on voit, comme au n° 114, que sa dérivée par rapport à u, pour $u = 0$, est l'expression $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f^2(z)}dz$, quantité finie et déterminée, puisque $f(z)$ n'a, sur γ, ni zéro, ni pôle. Faisons maintenant varier u infiniment peu, à partir de zéro : la fonction $\theta(u)$ a toujours pour valeur un nombre *entier* (Corollaire du n° 135), égal au nombre des zéros de $f(z) - u$ intérieurs à γ, et $\theta(0)$ est égal à m, en vertu de l'hypothèse initiale. Comme $\theta(u)$ est fonction *continue* de u pour $u = 0$, il résulte de là que, pour u assez petit, $\theta(u)$ est nécessairement égal à m. En d'autres termes, si a est zéro d'ordre m de $f(z)$, on peut prendre u assez petit pour que l'équation $f(z) - u = 0$ ait m racines à l'intérieur de γ, c'est-à-dire m racines voisines de a. C'est la propriété sur laquelle on s'est appuyé au n° 341 du Tome I, page 345.

Si $f(z)$ est holomorphe à l'intérieur de k, le nombre N est nul, et il reste

$$\frac{1}{2\pi i}\int_k \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \mathrm{M}.$$

VI. — THÉORÈMES GÉNÉRAUX SUR LES FONCTIONS UNIFORMES.

136. Fonctions entières. — On nomme *fonction entière* une fonction holomorphe dans tout le plan. Exemples : les polynomes entiers en z, les fonctions e^z, $\sin z$, $\cos z$.

Une fonction entière est développable par la série de Taylor ou de Maclaurin dans toute l'étendue du plan, puisqu'elle est holomorphe à l'intérieur d'un cercle quelconque.

1° *Une fonction entière, $f(z)$, pour laquelle le point à l'infini* (n° 103) *est un point ordinaire, se réduit à une constante.*

Car si l'on pose $z = \frac{1}{u}$, l'hypothèse est que $f\left(\frac{1}{u}\right)$ est une fonction holomorphe de u à l'intérieur d'un cercle, C', de centre $u = 0$, dans le plan (u) : son module admet donc, dans ce cercle, un maximum M'. Or, lorsque u reste à l'intérieur de C', le point $z = \frac{1}{u}$ reste, dans le plan de la variable z, à l'*extérieur* d'un cercle, C, dont le rayon est l'inverse du rayon de C', de sorte que le module de $f(z)$, *en dehors* du cercle C, est au plus égal à M. La fonction $f(z)$ étant holomorphe dans C, son module admet également, *dans* ce cercle et *sur* ce cercle, un maximum M'; et, par suite, dans tout le plan, $\mathrm{mod} f(z)$ est au plus égal au plus grand des nombres M et M'. Donc, par le théorème de Liouville (n° 125), $f(z)$ se réduit à une constante. C. Q. F. D.

2° *Une fonction entière $f(z)$, pour laquelle le point à l'infini est un pôle d'ordre p, est un polynome entier de degré p.*

Car, par hypothèse, $f\left(\frac{1}{u}\right)$ est de la forme :

$$\frac{A_0}{u^p} + \ldots + \frac{A_{p-1}}{u} + \varphi(u),$$

$\varphi(u)$ admettant le point $u = 0$ comme point ordinaire; donc

$$f(z) = A_0 z^p + \ldots + A_{p-1} z + \varphi\left(\frac{1}{z}\right),$$

$\varphi\left(\frac{1}{z}\right)$ étant une fonction de z pour laquelle le point à l'infini est ordinaire. D'ailleurs, cette fonction, différence de la fonction entière $f(z)$ et du polynome $A_0 z^p + \ldots + A_{p-1} z$, est entière; elle se réduit par suite (1°) à une constante. C. Q. F. D.

3° *Une fonction $f(z)$, méromorphe dans tout le plan, et pour laquelle le point à l'infini est un point ordinaire ou un pôle, est une fonction rationnelle.*

Observons d'abord que les pôles de $f(z)$ dans le plan sont en nombre limité. En effet, ils sont isolés (n° **129**) et, par suite (*ibid.*), sont en nombre limité à l'intérieur d'un cercle C, de centre $z = 0$, et de rayon R aussi grand qu'on veut : ils ne pourraient donc être en nombre illimité dans le plan que s'il y en avait une infinité à l'*extérieur* de C. Mais alors la fonction de u, $f\left(\frac{1}{u}\right)$, aurait une infinité de pôles à l'*intérieur* du cercle de centre $u = 0$ et de rayon $\frac{1}{R}$ aussi petit qu'on voudrait, ce qui est absurde, puisque, par hypothèse, le point $u = 0$ est ordinaire ou pôle (isolé) de cette fonction.

Soient alors $a_1, a_2, \ldots, a_q$ les pôles de $f(z)$; on pourra poser (n° **129**), en mettant en évidence le développement polaire de $f(z)$ autour de a_1,

$$f(z) = \frac{A_0}{(z - a_1)^m} + \ldots + \frac{A_{m-1}}{z - a_1} + \varphi_1(z),$$

$\varphi_1(z)$ étant, en vertu de cette équation, une fonction de même nature que $f(z)$, mais n'admettant plus a_1 comme pôle. De même

$$\varphi_1(z) = \frac{B_0}{(z - a_2)^n} + \ldots + \frac{B_{n-1}}{z - a_2} + \varphi_2(z),$$

et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on ait épuisé les q pôles. La fonction $\varphi(z)$ restante est entière, puisqu'elle n'a plus de pôle à distance finie; de plus, pour elle comme pour $f(z)$, le point à l'infini est évidemment point ordinaire ou pôle, c'est-à-dire (1° et 2°)

qu'elle se réduit à un polynome entier; $f(z)$ est donc la somme d'un nombre *limité* de fractions simples et d'un polynome entier.

C. Q. F. D.

137. **Corollaires.** — 1° *Une fonction entière $f(z)$, autre qu'un polynome entier, admet le point à l'infini comme point essentiel.*

Car, en vertu du numéro précédent (1° et 2°), le point $u = 0$ ne saurait être ni ordinaire ni pôle pour $f\left(\frac{1}{u}\right)$; c'est donc un point essentiel, puisque d'ailleurs $f\left(\frac{1}{u}\right)$ est fonction holomorphe de u entre deux cercles quelconques ayant ce point pour centre (nº 100, 3°).

Même énoncé pour une fonction méromorphe, dans tout le plan, autre qu'une fraction rationnelle.

2° *Un polynome entier d'ordre m, $f(z)$, a m racines (Théorème de d'Alembert).* Il suffit d'établir qu'il en a une. Or $1:f(z)$ est une fonction méromorphe dans tout le plan, dont les pôles sont les zéros ou racines de $f(z)$, et pour laquelle le point à l'infini est ordinaire. Si donc $f(z)$ n'avait pas de racine, $1:f(z)$ serait une fonction holomorphe dans tout le plan, c'est-à-dire une fonction entière, admettant le point à l'infini comme point ordinaire, par suite (nº 136, 1°) une constante. Pour échapper à cette conclusion absurde, il faut admettre que $f(z)$ a au moins une racine.

3° Si une fonction entière, $f(z)$, est sans zéros dans le plan, $\log f(z)$ n'a pas (nº 100) de point critique à distance finie; c'est donc une fonction holomorphe dans tout le plan, c'est-à-dire une fonction entière, $G(z)$, et l'on a

$$f(z) = e^{G(z)}.$$

Telle est la forme des fonctions entières sans zéros. Ainsi e^z n'a pas de zéros à distance finie (T. I, nº 158, Corollaire 2°).

138. **Développement d'une fonction méromorphe dans tout le plan.** — Soit $f(z)$ une telle fonction; si ses pôles $a_1, a_2, \ldots, a_q$ sont en nombre limité, on voit, comme au nº 136, 3°, qu'elle est la somme d'une fraction rationnelle et d'une fonction entière.

La fraction rationnelle est la somme des parties infinies des développements de $f(z)$ autour des pôles $a_1, \ldots, a_q$.

Si les pôles $a_1, a_2, \ldots$ sont en nombre infini, la somme des parties infinies des développements correspondants *peut* former une série, $S(z)$, convergente en tout point du plan autre qu'un pôle; si, de plus, $S(z)$ est méromorphe dans tout le plan, il est clair que la différence, $f(z) - S(z)$, *qui reste évidemment finie pour* $z = a_1, a_2, \ldots$, est holomorphe dans tout le plan. C'est donc une fonction entière, $G(z)$, et l'on a

$$f(z) = S(z) + G(z).$$

Exemples. — 1° Supposons les pôles $a_1, a_2, \ldots$ simples, et les résidus correspondants, $A_1, A_2, \ldots$, inférieurs, en module, à un nombre M.

Si la série $\sum \frac{1}{a_n}$, dont les termes sont rangés dans un ordre quelconque, est absolument convergente ([1]), je dis que la série formée par la somme des développements polaires,

$$S(z) = \frac{A_1}{z - a_1} + \frac{A_2}{z - a_2} + \ldots,$$

converge absolument et uniformément dans toute région finie, R, du plan, qui ne comprend aucun des pôles : le module du terme général est en effet (à partir d'une valeur assez grande du rang) inférieur à la quantité $\frac{M}{\operatorname{mod} a_n - \delta}$, δ désignant le maximum du module de z dans R. Or cette quantité est le terme général d'une série numérique, à termes positifs, qui converge, puisque, par hypothèse, $\sum \frac{1}{\operatorname{mod} a_n}$ converge; on en conclut que la série $S(z)$ converge *uniformément et absolument* (Tome I, n° 166) dans R et sur le contour de R; par suite (n° 117), $S(z)$ est une fonction holomorphe dans R, et évidemment méromorphe dans tout le plan, puisqu'elle n'a comme points singuliers à distance finie que les *pôles* simples $a_1, a_2, \ldots$, d'après son expression même.

On a donc, dans ce cas, $G(z)$ désignant une fonction entière,

$$f(z) = \frac{A_1}{z - a_1} + \frac{A_2}{z - a_2} + \ldots + G(z).$$

---

(1) En vertu de cette hypothèse, $\operatorname{mod} a_n$ tend vers ∞ pour n infini. *Voir* aussi, à ce sujet, le n° 139.

2° Les conditions étant les mêmes que dans l'exemple précédent, supposons que la série $\sum \frac{1}{a_n}$ ne soit pas absolument convergente, mais que la série $\sum \left(\frac{1}{a_n}\right)^q$ le soit, en désignant par q un entier positif.

On a identiquement

$$(1) \qquad \frac{1}{z-a_1} + \left(\frac{1}{a_1} + \frac{z}{a_1^2} + \ldots + \frac{z^{q-2}}{a_1^{q-1}}\right) = -\frac{z^{q-1}}{a_1^{q-1}(z-a_1)}.$$

Considérons alors la série

$$\begin{aligned} S(z) = \quad & A_1\left(\frac{1}{z-a_1} + \frac{1}{a_1} + \frac{z}{a_1^2} + \ldots + \frac{z^{q-2}}{a_1^{q-1}}\right) \\ & + A_2\left(\frac{1}{z-a_2} + \frac{1}{a_2} + \ldots \qquad + \frac{z^{q-2}}{a_2^{q-1}}\right) + \ldots; \end{aligned}$$

je dis encore qu'elle converge absolument et uniformément dans la région R définie plus haut. En effet, d'après (1), le module du terme général est inférieur, à partir d'une valeur suffisante de n, à la quantité

$$\frac{M\delta^{q-1}}{\operatorname{mod} a_n^q\left(1 - \frac{\delta}{\operatorname{mod} a_n}\right)},$$

qui est évidemment le terme général d'une série absolument convergente, en vertu de l'hypothèse.

La série $S(z)$ est donc encore (1°) holomorphe dans R, et méromorphe dans tout le plan; et l'on a, puisque $f(z) - S(z)$ reste fini pour tous les pôles a_n,

$$(2) \qquad f(z) = S(z) + G(z),$$

$G(z)$ étant une fonction entière.

Remarque. — La formule (1) suppose $a_1 \gtrless 0$. Si $f(z)$ admet le pôle $z = 0$, on formera $S(z)$ sans se préoccuper de ce pôle, et l'on ajoutera, à la série obtenue, la partie infinie du développement de $f(z)$ autour du pôle $z = 0$; $S(z)$ désignant cette nouvelle somme, la formule (2) subsistera évidemment.

Application. — La fonction $\cot z$, ou $\frac{\cos z}{\sin z}$, méromorphe dans tout le plan, a comme pôles simples les points $z = n\pi$, zéros

simples de $\sin z$. Les résidus correspondants sont tous égaux à $+1$, d'après la formule $f(a):\varphi'(a)$ du n° **133** (Corollaire 3°).

Or la série $\sum \frac{1}{n\pi}$ diverge, mais $\sum \left(\frac{1}{n\pi}\right)^2$ converge; on a donc ici

$$S(z) = \sum_n \left(\frac{1}{z - n\pi} + \frac{1}{n\pi}\right) + \frac{1}{z},$$

n prenant les valeurs entières de $-\infty$ à $+\infty$, sauf zéro; d'où

(3) $$\cot z = \frac{1}{z} + \sum_n \left(\frac{1}{z - n\pi} + \frac{1}{n\pi}\right) + G(z).$$

La série étant absolument convergente, on peut grouper les termes qui répondent à $+n$ et à $-n$, ce qui donne

(4) $$\cot z = \frac{1}{z} + \sum \frac{2z}{z^2 - n^2\pi^2} + G(z),$$

n variant de $+1$ à $+\infty$.

Nous verrons par une autre méthode (n° **148**), que $G(z)$ est nul.

139. Théorème de M. Mittag-Leffler. — Nous allons établir maintenant que, *dans tous les cas,* on peut représenter une fonction $f(z)$, méromorphe dans tout le plan, par une série d'éléments fractionnaires simples, plus une fonction entière.

Soient toujours a_1, a_2, ... les pôles, en nombre infini, de $f(z)$; rangeons-les par ordre de modules croissants, l'ordre de ceux qui peuvent avoir un même module étant arbitraire; $\mathrm{mod}\, a_n$ tend vers l'infini avec n, car, dans une région finie, les pôles d'une fonction méromorphe sont en nombre limité.

Désignons par $R_n(z)$ la partie infinie du développement de $f(z)$ autour du pôle a_n, et supposons qu'aucun des a_n ne soit égal à zéro.

Développons $R_n(z)$ en série de Maclaurin, suivant les puissances croissantes de z : ce développement est légitime, puisque $R_n(z)$, fraction rationnelle n'admettant que le pôle a_n, est holomorphe autour de l'origine; il est uniformément convergent dans un cercle, qui a pour centre l'origine et pour rayon une longueur inférieure à $\mathrm{mod}\, a_n$, égale par exemple à $\frac{1}{2}\mathrm{mod}\, a_n$. Soit $P_\nu(z)$ la somme des ν premiers termes du développement; P_ν est un poly-

nome d'ordre $\nu - 1$ en z : on pourra toujours prendre ν assez grand, en raison de la convergence uniforme de la série de Maclaurin dans le cercle considéré, pour qu'on ait

$$(5) \qquad \operatorname{mod}[R_n(z) - P_\nu(z)] < \frac{1}{n^2}, \qquad \text{lorsque } \operatorname{mod} z < \frac{1}{2} \operatorname{mod} a_n.$$

Considérons alors la série

$$S(z) = \sum_n [R_n(z) - P_\nu(z)],$$

je dis qu'elle est absolument et uniformément convergente dans toute région R du plan ne renfermant aucun des pôles $a_1, a_2, \ldots$. Soit en effet δ le maximum du module de z dans R ; dès que n est pris assez grand pour que $\frac{1}{2} \operatorname{mod} a_n$ (qui croît indéfiniment avec n) reste supérieur à δ, le module du terme correspondant de $S(z)$ reste, en vertu de (5), inférieur à $\frac{1}{n^2}$, terme général positif d'une série numérique convergente.

On en conclut, comme au numéro précédent (1°), que $S(z)$ est holomorphe dans R, donc méromorphe dans tout le plan ; et, par suite, on a encore

$$f(z) = S(z) + G(z),$$

$G(z)$ désignant une fonction entière.

Si l'une des quantités a_n est nulle, il suffira d'ajouter à $S(z)$ la partie infinie du développement de $f(z)$ autour du pôle $z = 0$, et la formule subsistera.

Ainsi : *On peut toujours former une fonction* $S(z)$, *définie par une série et méromorphe dans tout le plan, ne possédant pas d'autres pôles que ceux d'une fonction donnée méromorphe dans le plan,* $f(z)$, *et admettant, autour de chaque pôle, le même développement polaire que* $f(z)$. *La différence* $f(z) - S(z)$ *est une fonction entière.*

140. Théorème de Weierstrass. — Si deux fonctions, holomorphes autour d'un point a, admettent toutes deux ce point comme zéro d'un même ordre m, leur quotient est holomorphe autour de a (n° 129, *Remarque*). Il en résulte que le quotient

de deux fonctions entières, qui admettent les mêmes zéros, avec les mêmes ordres respectifs de multiplicité, est une fonction entière sans zéros, c'est-à-dire (n° 137, 3°) une exponentielle $e^{G(z)}$, $G(z)$ désignant une fonction entière.

Cela posé, soit $f(z)$ une fonction entière; si ses zéros sont en nombre fini, $a_1, a_2, \ldots, a_q$, avec les ordres $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$, le produit $(z-a_1)^{\alpha_1}(z-a_2)^{\alpha_2}\ldots(z-a_q)^{\alpha_q}$ admet les mêmes zéros, avec les mêmes ordres, et l'on a

$$f(z) = e^{G(z)}\left(1-\frac{z}{a_1}\right)^{\alpha_1}\left(1-\frac{z}{a_2}\right)^{\alpha_2}\cdots\left(1-\frac{z}{a_q}\right)^{\alpha_q}.$$

Si les zéros de $f(z)$ sont en nombre infini $a_1, a_2, \ldots$, avec les ordres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, la fonction $\frac{f'(z)}{f(z)}$ est méromorphe dans tout le plan : ses pôles sont (n° 135) les points $a_1, a_2, \ldots$; chacun d'eux est pôle simple, et le résidu correspondant au pôle a_n est α_n (*ibid.*).

Supposons qu'aucun des a_n ne soit nul, et appliquons à $\frac{f'(z)}{f(z)}$ le théorème de M. Mittag-Leffler. Il vient

$$(6)\qquad \frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_n \left[\frac{\alpha_n}{z-a_n} - P_\nu(z)\right] + G(z).$$

Le polynome $P_\nu(z)$ est formé par les ν premiers termes du développement de $\frac{\alpha_n}{z-a_n}$ en série de Maclaurin; donc

$$(7)\qquad -P_\nu(z) = \alpha_n\left[\frac{1}{a_n} + \frac{z}{a_n^2} + \ldots + \frac{z^{\nu-1}}{a_n^\nu}\right],$$

ν étant choisi comme le veut la méthode du n° 139. Intégrons maintenant, entre o et z, les deux membres de (6), et observons que la série $\sum_n$, en raison de sa convergence uniforme, peut-être intégrée terme à terme; nous obtenons la relation :

$$(8)\qquad \begin{cases} \log\dfrac{f(z)}{f(0)} = \displaystyle\sum_n \alpha_n\left[\log\left(1-\frac{z}{a_n}\right) + \frac{z}{a_n} + \frac{z^2}{2a_n^2} + \ldots + \frac{z^\nu}{\nu a_n^\nu}\right] \\ \qquad\qquad + \displaystyle\int_0^z G(z)\,dz. \end{cases}$$

D'ailleurs $\int_0^z G(z)\,dz$, intégrale d'une fonction holomorphe dans le plan, y est également holomorphe, c'est-à-dire est entière; nous trouvons alors, en remontant des logarithmes aux nombres, l'ex-

pression de $f(z)$ sous forme de *produit infini :*

$$(9) \qquad f(z) = e^{H(z)} \prod_n \left(1 - \frac{z}{a_n}\right)^{\alpha_n} e^{\alpha_n\left(\frac{z}{a_n} + \frac{z^2}{2a_n^2} + \ldots + \frac{z^\nu}{\nu a_n^\nu}\right)},$$

$H(z)$ désignant une fonction entière ([1]).

Telle est, d'après Weierstrass, l'expression de toute fonction entière $f(z)$; le produit infini converge quel que soit z, puisque l'équation (6), dont on est parti, est valable dans tout le plan : ce théorème a précédé celui de M. Mittag-Leffler, dont nous avons trouvé plus commode ici de le déduire.

Si $f(z)$ admet comme zéro d'ordre m le point $z = 0$, on n'aura qu'à multiplier par z^m le second membre de (9).

141. Exemple. — Soit $f(z) = \sin z$; on a (n° 138) :

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \cot z = \frac{1}{z} + \sum \left(\frac{1}{z - n\pi} + \frac{1}{n\pi}\right) + G(z),$$

d'où l'on tire, par la méthode précédente,

$$\sin z = z\, e^{H(z)} \prod_n \left(1 - \frac{z}{n\pi}\right) e^{\frac{z}{n\pi}},$$

n prenant toutes les valeurs entières de $-\infty$ à $+\infty$, sauf zéro.

De la relation (n° 138) :

$$\cot z = \frac{1}{z} + \sum \frac{2z}{z^2 - n^2\pi^2} + G(z), \qquad (n = 1, 2, \ldots, \infty),$$

on tirerait de même

$$\sin z = z\, e^{H(z)} \prod_n \left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right),$$

n prenant les valeurs entières de $+1$ à $+\infty$.

La fonction $H(z)$ est d'ailleurs égale à zéro, ainsi que nous le verrons plus loin (n° 149). Il est à observer que les théorèmes de Weierstrass et de M. Mittag-Leffler introduisent des fonctions entières, $G(z)$ et $H(z)$, dont la détermination directe, lorsque $f(z)$ est donnée, est généralement difficile.

([1]) Les logarithmes qui figurent aux deux membres de (8) ne sont déterminés qu'à la quantité $2k\pi i$ près, k étant entier; mais cette indétermination ne subsiste pas dans (9), puisque $e^{2k\pi i} = 1$.

CHAPITRE II.

APPLICATIONS ANALYTIQUES.

I. — CALCUL D'INTÉGRALES DÉFINIES.

142. Les théories générales de Cauchy fournissent une méthode féconde pour le calcul des intégrales définies, réelles ou imaginaires; dans ces recherches, deux lemmes nous seront utiles.

Lemme I. — *L'intégrale* $\int f(z)\,dz$, *prise le long d'un arc d'une circonférence infiniment petite, de centre a et de rayon r, tend vers zéro avec r, si le maximum du module de* $(z-a)f(z)$ *sur l'arc d'intégration tend lui-même vers zéro avec r.*

Soit, en effet, M le maximum du module de $(z-a)f(z)$ sur l'arc considéré; on a, sur cet arc, par hypothèse,

$$\operatorname{mod} f(z) \leqq \frac{M}{\operatorname{mod}(z-a)} \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \leqq \frac{M}{r},$$

d'où (n° 105, 3°) :

$$\operatorname{mod}\int f(z)\,dz \leqq \frac{M}{r}L,$$

L étant la longueur de l'arc, qui est inférieure à celle $2\pi r$ de la circonférence entière. Le module de l'intégrale est donc au plus égal à $2\pi M$, ce qui établit le lemme, puisque M tend vers zéro avec r, par hypothèse.

Lemme II. — *L'intégrale* $\int f(z)\,dz$, *prise le long d'un arc d'une circonférence infiniment grande ayant pour centre l'origine et pour rayon* R, *tend vers zéro, quand* R *croît indéfiniment, si le maximum du module de* $zf(z)$ *sur l'arc d'intégration tend lui-même vers zéro, pour* R *infini.*

Si, en effet, M est le maximum du module de $zf(z)$ sur l'arc,

on a, sur cet arc, par hypothèse,

$$\operatorname{mod} f(z) \leq \frac{M}{R},$$

d'où

$$\operatorname{mod} \int f(z)\, dz \leq \frac{M}{R} L \leq 2\pi M,$$

ce qui démontre le lemme, puisque $\lim M = 0$, pour $R = \infty$.

143. Intégrales de fonctions rationnelles. — Intégrons, par exemple, la fonction méromorphe

$$f(z) = \frac{1}{(1+z^2)^2},$$

le long du contour K, formé : 1° d'un demi-cercle ABA′ (*fig.* 57),

Fig. 57.

de rayon infiniment grand, ayant l'origine pour centre; 2° du diamètre A′A, qui coïncide avec l'axe des x.

D'après le lemme II, l'intégrale le long du demi-cercle est nulle, car la fonction

$$z f(z) \quad \text{ou} \quad \frac{z}{(1+z^2)^2}$$

tend vers zéro quand le module de z croît indéfiniment; l'intégrale suivant K se réduit donc à l'intégrale suivant la droite A′A, c'est-à-dire à l'intégrale réelle

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx.$$

Mais, d'après le théorème des résidus (n° 134), elle est égale à $2\pi i \sum A$, $\sum A$ désignant la somme des résidus de $f(z)$ pour les pôles intérieurs à K, c'est-à-dire pour les pôles situés au-dessus de Ox. La fonction $\frac{1}{(1+z^2)^2}$ n'a, au-dessus de Ox, qu'un pôle

(double), $z = +i$; pour calculer son résidu, posons $z = i + t$ (n° 133), il vient :

$$\frac{1}{(1+z^2)^2} = \frac{1}{(2it+t^2)^2} = \frac{1}{t^2}\,\frac{1}{(2i+t)^2} = \frac{1}{t^2(-4+4ti+\ldots)},$$

et, par division,

$$= \frac{1}{t^2}\left(-\frac{1}{4} - \frac{ti}{4} + \ldots\right) = -\frac{1}{4t^2} + \frac{1}{4it} + \ldots$$

Le résidu est donc $\frac{1}{4i}$. Par suite

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{2\pi i}{4i} = \frac{\pi}{2}.$$

Cette méthode s'applique d'une manière générale au calcul de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx,$$

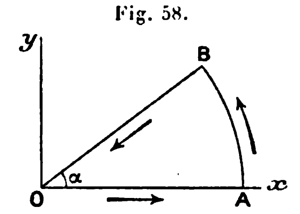
où P et Q sont des polynomes dont le second n'a pas de racine réelle, et tels que le degré de Q surpasse de deux unités au moins celui de P (Tome I, n° 307).

144. Intégrales de Fresnel et intégrales analogues. — Intégrons la fonction

$$f(z) = e^{-z^2}$$

le long d'un contour K (*fig.* 58), formé : 1° par un segment

Fig. 58.



OA = R de l'axe des x, que nous ferons croître ensuite indéfiniment; 2° par un arc de cercle AB de centre O, de rayon R et d'angle au centre $\alpha\left(\alpha < \frac{\pi}{4}\right)$; 3° par le rayon BO.

La fonction e^{-z^2} étant holomorphe dans tout le plan, son inté-

grale le long de K est nulle. On a donc

$$(1)\qquad \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx + \int_{AB} e^{-z^2}\,dz + \int_{BO} e^{-z^2}\,dz = 0.$$

La première intégrale est connue; elle est égale (n° 76) à $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$; la seconde est nulle, comme on va l'établir tout à l'heure. Pour transformer la troisième, observons que, sur la droite OB, z est de la forme

$$z = \rho\, e^{i\alpha} = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha),$$

et, de B à O, ρ varie, par valeurs réelles, de $+\infty$ à 0. La troisième intégrale est donc

$$\int_\infty^0 e^{-\rho^2(\cos 2\alpha + i\sin 2\alpha)}(\cos\alpha + i\sin\alpha)\,d\rho.$$

L'équation (1) devient ainsi :

$$\frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \int_0^\infty e^{-\rho^2(\cos 2\alpha + i\sin 2\alpha)}(\cos\alpha + i\sin\alpha)\,d\rho$$

$$= \int_0^\infty d\rho\, e^{-\rho^2\cos 2\alpha}[\cos(\rho^2\sin 2\alpha) - i\sin(\rho^2\sin 2\alpha)](\cos\alpha + i\sin\alpha).$$

Égalons séparément, dans les deux membres, les parties réelles et imaginaires, en posant, pour abréger,

$$I_1 = \int_0^\infty e^{-\rho^2\cos 2\alpha}\cos(\rho^2\sin 2\alpha)\,d\rho,$$

$$I_2 = \int_0^\infty e^{-\rho^2\cos 2\alpha}\sin(\rho^2\sin 2\alpha)\,d\rho;$$

il vient

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\sqrt{\pi} = I_1\cos\alpha + I_2\sin\alpha, \\ 0 = I_1\sin\alpha - I_2\cos\alpha, \end{cases}$$

d'où l'on tire

$$I_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\cos\alpha, \qquad I_2 = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\sin\alpha.$$

Si l'on pose maintenant, dans les intégrales I_1 et I_2,

$$\rho\sqrt{\sin 2\alpha} = u,$$

ces égalités deviennent

(2)
$$\left\{\begin{aligned} &\int_0^\infty e^{-u^2\cot 2\alpha}\cos u^2\,du = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\cos\alpha\sqrt{\sin 2\alpha},\\ &\int_0^\infty e^{-u^2\cot 2\alpha}\sin u^2\,du = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\sin\alpha\sqrt{\sin 2\alpha},\end{aligned}\right.$$

formules qui font connaître les valeurs des deux intégrales

$$\int_0^\infty e^{-mu^2}\cos u^2\,du,\quad \int_0^\infty e^{-mu^2}\sin u^2\,du,$$

pour $m > 0$.

Mais il nous reste maintenant à démontrer que l'intégrale intermédiaire $\int_{AB} e^{-z^2}dz$, dans la relation (1), est nulle; appliquons pour cela le lemme II du n° **142**; nous avons, le long de l'arc AB,

$$z = \mathrm{R}\,e^{i\varphi} = \mathrm{R}(\cos\varphi + i\sin\varphi),\qquad (\varphi \text{ allant de } 0 \text{ à } \alpha),$$
$$zf(z) = z\,e^{-z^2} = \mathrm{R}\,e^{i\varphi}\,e^{-\mathrm{R}^2\cos 2\varphi}\,e^{-\mathrm{R}^2 i\sin 2\varphi}.$$

Si l'on observe que le module de $e^{\mathrm{A}i}$, où A est réel, est l'unité (car $e^{\mathrm{A}i} = \cos\mathrm{A} + i\sin\mathrm{A}$), on voit que le module du dernier membre est $\mathrm{R}\,e^{-\mathrm{R}^2\cos 2\varphi}$; son maximum correspond au minimum de $\cos 2\varphi$ sur l'arc, c'est-à-dire à $\varphi = \alpha$. Ce maximum est donc

$$\mathrm{R}\,e^{-\mathrm{R}^2\cos 2\alpha}$$

et tend vers zéro pour R infini, puisque l'hypothèse $\alpha < \frac{\pi}{4}$ entraîne $\cos 2\alpha > 0$. D'après le lemme II, l'intégrale $\int_{AB}$ est donc nulle, et les formules (2) ci-dessus sont démontrées.

Formules de Fresnel. — Les formules (2) restent-elles vraies pour le cas limite de $\alpha = \frac{\pi}{4}$? Ici, le lemme II ne s'applique plus, car le maximum de $zf(z)$, à savoir $\mathrm{R}\,e^{-\mathrm{R}^2\cos 2\alpha}$, est alors R, et ne tend plus vers zéro pour R infini.

Il faut donc recourir à une autre méthode pour établir que l'intégrale $\int_{AB}$ est nulle.

On a, sur AB, $z = \mathrm{R}(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $dz = \mathrm{R}\,i\,e^{i\varphi}\,d\varphi$; d'où

$$\int_{AB} e^{-z^2}dz = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-\mathrm{R}^2\cos 2\varphi}\,e^{-i\mathrm{R}^2\sin 2\varphi}\,e^{i\varphi}\,\mathrm{R}\,i\,d\varphi.$$

Le module du second membre est inférieur à l'intégrale obtenue en remplaçant chacun des facteurs sous le signe $\int$ par son module, c'est-à-dire inférieur à l'intégrale réelle

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} R\, e^{-R^2 \cos 2\varphi}\, d\varphi.$$

Il suffit donc de prouver que J tend vers zéro pour R infini; or, en posant

$$2\varphi = \frac{\pi}{2} - \theta,$$

il vient

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} R\, e^{-R^2 \sin\theta}\, d\theta.$$

De zéro à $\frac{\pi}{2}$, $\sin\theta$ est supérieur à $\frac{\theta}{2}$, comme on le reconnaît aisément; on augmente donc le second membre en remplaçant $\sin\theta$ par $\frac{\theta}{2}$, c'est-à-dire qu'on a

$$J < \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} R\, e^{-R^2 \frac{\theta}{2}}\, d\theta = -\frac{R}{2} \frac{2}{R^2} \left(e^{-R^2 \frac{\theta}{2}}\right)_0^{\frac{\pi}{2}}$$

ou

$$J < \frac{1}{R}\left(1 - e^{-\frac{\pi}{4} R^2}\right),$$

et le second membre tend vers zéro, pour R infini. C. Q. F. D.

Donc les formules (2) sont vraies pour $\alpha = \frac{\pi}{4}$; elles donnent alors

$$\int_0^\infty \cos u^2\, du = \int_0^\infty \sin u^2\, du = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}};$$

ce sont les valeurs des *intégrales de Fresnel*.

145. Calcul de $\int_0^\infty \frac{x^{p-1} - x^{q-1}}{1-x}\, dx$, et de $\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x}\, dx$. — Soit la fonction

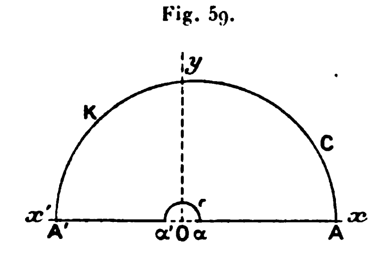
$$f(z) = \frac{z^{p-1} - z^{q-1}}{1-z},$$

où p et q désignent des constantes réelles, comprises entre 0 et 1.

Cette fonction admet comme point de branchement $z = 0$, puisque p et q ne sont pas entiers; elle est uniforme dans un contour simple ne comprenant pas ce point, par exemple dans le contour K ci-dessous (traits pleins) formé par deux demi-circonférences C et c, de centre O, de rayons infiniment grand et infiniment petit, et par les segments $A'\alpha'$, αA de l'axe des x.

Pour définir complètement $f(z)$ dans ce contour, nous choisirons, parmi les valeurs de z^{p-1} (et z^{q-1}), celle qui est réelle et

Fig. 59.



positive sur la partie positive de Ox, c'est-à-dire celle qui est réelle et positive pour z réel et positif. Or, p étant réel, si $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, on a (Tome I, n° 160) :

$$z^{p-1} = \rho^{p-1}[\cos(p-1)\varphi + i\sin(p-1)\varphi],$$

φ désignant un quelconque des arguments de z, lesquels diffèrent entre eux de $2k\pi$. Lorsque z reste sur la partie positive de l'axe des x, $\varphi = 2k\pi$, et pour que z^{p-1} soit réel et positif, il faut prendre $k = 0$.

En d'autres termes, on doit regarder l'argument φ, de z, comme nul sur le côté de Ox du contour K : par suite, en un point quelconque intérieur au contour, il est compris entre 0 et π; sur Ox' il est égal à π; et, si φ désigne l'argument ainsi défini, on a, à l'intérieur du contour et sur ce contour,

$$z^{p-1} = \rho^{p-1}e^{(p-1)i\varphi}, \qquad z^{q-1} = \rho^{q-1}e^{(q-1)i\varphi}.$$

Cela posé, je dis que $f(z)$ est holomorphe à l'intérieur de K et sur K. Le numérateur, en effet, $z^{p-1} - z^{q-1}$, y est holomorphe, puisque le point critique O est extérieur au contour; le dénominateur, $1 - z$, s'annule il est vrai sur le contour, pour $z = 1$, mais en ce point le numérateur, $z^{p-1} - z^{q-1}$, s'annule aussi, et

comme ce numérateur est holomorphe autour du point $z = 1$, le zéro 1 est au moins d'ordre un, de sorte que $f(z)$ reste fini. Il en résulte bien que $f(z)$ est holomorphe dans K et sur K; par suite l'intégrale $\int_K f(z)\,dz$, prise le long de ce contour, est nulle.

Cette intégrale se décompose en quatre autres :

1° et 2° Les intégrales le long des demi-cercles C et c; elles sont nulles, car $zf(z)$ tend vers zéro pour $\bmod z = 0$ ou $\bmod z = \infty$, puisque p et q sont compris entre 0 et 1 (lemmes I et II, n° **142**).

3° L'intégrale réelle de α à A, $\int_0^\infty \frac{x^{p-1} - x^{q-1}}{1 - x}$, que nous désignerons par J : elle a une valeur finie et déterminée, comme on le voit aisément en appliquant les règles du Cours de première année.

4° L'intégrale suivant A$'\alpha'$. Or, le long de Ox', l'argument de z étant π, on a, par ce qui précède,

$$z = \rho e^{\pi i}, \qquad z^{p-1} = \rho^{p-1} e^{(p-1)\pi i} = -\rho^{p-1} e^{p\pi i}, \qquad dz = d\rho . e^{\pi i} = -d\rho,$$

et, par suite,

$$\int_{A'}^{\alpha'} = \int_\infty^0 \frac{\rho^{p-1} e^{p\pi i} - \rho^{q-1} e^{q\pi i}}{1 + \rho} d\rho,$$

ρ étant réel.

Donc, finalement, on a, en écrivant que $\int_K$ est nul,

$$J + \int_\infty^0 \frac{\rho^{p-1} e^{p\pi i} - \rho^{q-1} e^{q\pi i}}{1 + \rho} d\rho = 0,$$

et, en remplaçant $e^{p\pi i}$ par $\cos p\pi + i \sin p\pi$, et séparant le réel de l'imaginaire,

$$(3) \qquad \begin{cases} J = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\rho^{p-1} \cos p\pi - \rho^{q-1} \cos q\pi}{1 + \rho} d\rho, \\ 0 = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\rho^{p-1} \sin p\pi - \rho^{q-1} \sin q\pi}{1 + \rho} d\rho. \end{cases}$$

Ces deux relations vont nous permettre de calculer les deux intégrales que nous avons en vue.

146. Prenons d'abord la seconde relation (3); en posant, pour

abréger,

$$(4) \qquad F(p) = \int_0^\infty \frac{\rho^{p-1}}{1+\rho}\, d\rho,$$

elle s'écrit

$$F(p)\sin p\pi = F(q)\sin q\pi.$$

Or, lorsque p et q sont des variables indépendantes, une fonction de p seul ne peut être égale à une fonction de q seul que si ces deux fonctions se réduisent à une même constante A, indépendante de p, q. On a donc

$$F(p)\sin p\pi = A \qquad \text{ou} \qquad F(p) = \frac{A}{\sin p\pi}.$$

Pour déterminer la constante absolue A, observons que, d'après (4), l'intégrale $F(p)$ n'est autre chose (n° 85) que le produit $\Gamma(p)\Gamma(1-p)$, en sorte qu'on a

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{A}{\sin p\pi};$$

et si l'on fait dans cette relation $p = \frac{1}{2}$, en observant (n° 86) que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ est égal à $\sqrt{\pi}$, on trouve

$$A = \pi \sin\frac{\pi}{2} = \pi.$$

On obtient ainsi la formule

$$(5) \qquad \int_0^\infty \frac{\rho^{p-1}}{1+\rho}\, d\rho = \Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi},$$

qui a été annoncée au n° 85.

147. Prenons maintenant la première relation (3), on l'écrit

$$J = \cos p\pi \int_0^\infty \frac{\rho^{p-1}}{1+\rho}\, d\rho - \cos q\pi \int_0^\infty \frac{\rho^{q-1}}{1+\rho}\, d\rho;$$

ou, en tenant compte de la formule (5), et remplaçant J par son expression de définition,

$$J = \int_0^\infty \frac{x^{p-1} - x^{q-1}}{1-x}\, dx = \pi(\cot p\pi - \cot q\pi).$$

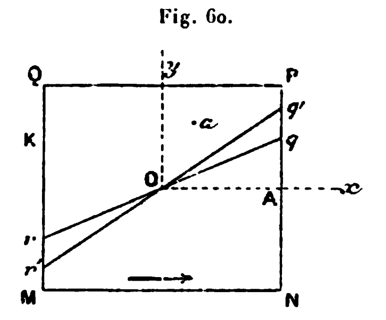
II. — DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIES DE FRACTIONS.

148. Cauchy, grâce au théorème des Résidus, a obtenu certains développements en séries de fractions simples, de la même forme que ceux de M. Mittag-Leffler. Nous prendrons comme exemple la fonction cotangente, en considérant l'intégrale

$$(1)\qquad \int \frac{dz}{z(z-a)} \cot \pi z,$$

prise le long du contour d'un carré, K, de côtés parallèles aux axes, de centre $z = 0$ (*fig.* 60), et dont le demi-côté OA a pour lon-

Fig. 60.



gueur $m + \frac{1}{2}$: m désigne un entier positif, qu'on fera ensuite croître indéfiniment, et a un point quelconque du plan, intérieur au carré.

Je dis que l'intégrale (1), le long de ce contour, est nulle.

Observons d'abord ce qui suit :

1° Sur les côtés NP et QM du carré, on a $z = \pm\left(m + \frac{1}{2}\right) + yi$, d'où

$$\cot \pi z = \cot\left(\pm m\pi \pm \frac{\pi}{2} + \pi y i\right) = -\operatorname{tang} \pi y i;$$

ce qui donne

$$\cot \pi z = -\frac{\sin \pi y i}{\cos \pi y i} = -\frac{1}{i}\,\frac{e^{-\pi y} - e^{\pi y}}{e^{-\pi y} + e^{\pi y}} = +\frac{1}{i}\,\frac{e^{2\pi y} - 1}{e^{2\pi y} + 1}.$$

Le module du dernier membre est $\bmod \frac{e^{2\pi y}-1}{e^{2\pi y}+1}$, quantité au plus égale à 1, puisque y est réel.

2° Sur les côtés PQ et MN, on a $z = x \pm i\left(m+\frac{1}{2}\right)$, d'où

$$\cot \pi z = \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z} = i\frac{e^{\pi x i \mp \pi\left(m+\frac{1}{2}\right)} + e^{-\pi x i \pm \pi\left(m+\frac{1}{2}\right)}}{e^{\pi x i \mp \pi\left(m+\frac{1}{2}\right)} - e^{-\pi x i \pm \pi\left(m+\frac{1}{2}\right)}}.$$

Quand m tend vers $+\infty$, une des exponentielles du numérateur a son module infini, l'autre a son module nul; comme les mêmes exponentielles figurent au dénominateur, $\bmod \cot \pi z$ tend vers 1 pour m infini.

Donc enfin, sur tout le contour du carré, à partir d'une valeur suffisamment grande de m, $\bmod \cot \pi z$ reste *inférieur* à une quantité plus grande que 1, à 2 par exemple.

Cela posé, sur ce contour, $\bmod z$ reste *supérieur* à OA, c'est-à-dire à $m+\frac{1}{2}$; $\bmod(z-a)$ reste *supérieur* à $\bmod z - \bmod a$, et, par suite, à $m+\frac{1}{2}-\bmod a$; la longueur de la ligne d'intégration étant $8\left(m+\frac{1}{2}\right)$, on voit (n° 105, 3°) que le module de l'intégrale proposée (1) est *inférieur* à

$$\frac{1}{\left(m+\frac{1}{2}\right)}\,\frac{1}{m+\frac{1}{2}-\bmod a}\,2.8\left(m+\frac{1}{2}\right),$$

quantité qui tend vers zéro pour m infini. Par suite l'intégrale (1), prise sur le contour du carré, est nulle *à la limite*.

On peut donc écrire, sous une forme équivalente,

$$0 = \frac{1}{a}\int_K \cot \pi z\, dz\left(\frac{1}{z-a}-\frac{1}{z}\right),$$

ou

$$\int_K \frac{dz}{z-a}\cot \pi z = \int_K \frac{dz}{z}\cot \pi z,$$

les intégrales étant toujours prises sur le contour du carré. Or celle qui figure au second membre est nulle, car, en deux points opposés du contour, tels que q et r, les valeurs de $\frac{1}{z}\cot \pi z$ sont les mêmes, puisque z et $\cot \pi z$ sont des fonctions impaires de z; les valeurs de dz (représentées par les segments qq' et rr') sont

égales et de signes contraires, de sorte que les éléments de l'intégrale se détruisent deux à deux. Donc, *à la limite,* c'est-à-dire pour $m = +\infty$, on a

$$\int_K \frac{dz}{z-a} \cot \pi z = 0. \tag{2}$$

En d'autres termes, d'après le théorème des résidus, applicable ici, puisque la fonction sous $\int$ est méromorphe dans tout le plan, la somme des résidus de la fonction $\frac{1}{z-a}\cot\pi z$, pour les pôles situés dans le carré, est nulle (à la limite) : ces pôles (tous simples) sont $z = a$, et les zéros (tous simples) de $\operatorname{tang}\pi z$, c'est-à-dire les zéros, $z = n\pi$, de $\sin\pi z$, puisque $\cos\pi z$, fonction entière, n'a pas de pôles.

De plus, pour que le pôle $z = n$ soit dans le carré, il faut que l'on ait $-m \leqq n \leqq m$.

Le résidu de $\cot\pi z : (z-a)$, relatif au pôle $z = a$, est $\cot\pi a$; on obtient le résidu relatif au pôle $z = n$ en écrivant la fonction $\frac{\cos\pi z : (z-a)}{\sin\pi z}$, et, par la formule $f(\alpha) : \varphi'(\alpha)$ du n° 133, 3°, ce résidu est égal à $\frac{\cos\pi n : (n-a)}{\pi\cos\pi n}$, c'est-à-dire à $\frac{1}{\pi}\frac{1}{n-a}$.

On a donc enfin, en écrivant que la somme des résidus est nulle,

$$\cot\pi a + \lim \sum_{n=-m}^{n=+m} \frac{1}{\pi(n-a)} = 0, \quad \text{(pour } m \text{ infini)}, \tag{3}$$

ou, en posant $\pi a = u$,

$$\cot u = \lim \sum_{n=-m}^{n=+m} \frac{1}{u - n\pi}; \tag{4}$$

c'est-à-dire

$$\left\{\begin{aligned} \cot u = \ldots &+ \frac{1}{u+n\pi} + \ldots + \frac{1}{u+2\pi} + \frac{1}{u+\pi} \\ &+ \frac{1}{u} + \frac{1}{u-\pi} + \frac{1}{u-2\pi} + \ldots + \frac{1}{u-n\pi} + \ldots . \end{aligned}\right. \tag{5}$$

En réunissant les termes qui répondent à $+n$ et à $-n$, *dont l'ensemble constitue le terme général de la série* d'après (4), on a aussi

$$\cot u = \frac{1}{u} + \frac{2u}{u^2 - \pi^2} + \frac{2u}{u^2 - 4\pi^2} + \ldots + \frac{2u}{u^2 - n^2\pi^2} + \ldots, \tag{6}$$

formule plus complète que la formule (4) du n° 138, et qui montre que la fonction entière $G(z)$, qui figurait dans celle-ci, est nulle.

149. Corollaire. — Écrivons cette équation

$$\cot u - \frac{1}{u} = \frac{2u}{u^2 - \pi^2} + \frac{2u}{u^2 - 4\pi^2} + \ldots,$$

et intégrons les deux membres entre o et u; il vient

$$\left(\log \frac{\sin u}{u}\right)_0^u = \log \frac{\sin u}{u} = \log\left(1 - \frac{u^2}{\pi^2}\right) + \log\left(1 - \frac{u^2}{4\pi^2}\right) + \ldots;$$

d'où, en remontant des logarithmes aux nombres,

$$\sin u = u\left(1 - \frac{u^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{u^2}{4\pi^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{u^2}{n^2\pi^2}\right)\cdots,$$

ce qui donne l'expression précise de $\sin u$ en produit infini.

150. La formule (5) met en évidence la périodicité de $\cot u$. Soit, en effet, $S_n(u)$ la somme du terme central $\frac{1}{u}$, des n termes qui le précèdent et des n termes qui le suivent; on trouve évidemment, en changeant u en $u + \pi$,

$$S_n(u + \pi) - S_n(u) = \frac{1}{u + (n+1)\pi} - \frac{1}{u - n\pi},$$

d'où, en passant à la limite pour $n = +\infty$, et puisque $\cot u = \lim S_n(u)$,

$$\cot(u + \pi) - \cot u = 0.$$

III. — INTÉGRALES DE DIFFÉRENTIELLES ALGÉBRIQUES.

---

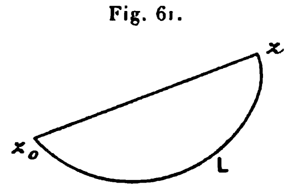
151. Soit une fonction $f(z)$, qui, dans une certaine région R du plan, présente des points critiques (pôles, points essentiels ou de branchement) *en nombre limité;* désignons par z_0 et z deux points ordinaires de la région, et considérons l'intégrale

$$\int_{z_0}^{z} f(z)\, dz,$$

la ligne d'intégration étant supposée aller de z_0 à z sans sortir de la région R, et la valeur initiale de $f(z)$, pour $z = z_0$, étant déterminée. La fonction $f(z)$ n'étant pas holomorphe dans R, l'intégrale précédente n'est pas nécessairement indépendante du choix de la ligne d'intégration : proposons-nous d'étudier les diverses valeurs dont elle est susceptible, suivant le choix de cette ligne.

Observons d'abord qu'un chemin quelconque L, allant de z_0 à z, se ramène, au point de vue de la valeur de l'intégrale, à un *chemin fermé* allant de z_0 à z_0, suivi d'un *chemin déterminé*, le segment rectiligne $z_0 z$ par exemple, allant de z_0 à z : il suffit, en effet, d'ajouter à la ligne L le segment $z z_0$, que l'on fera suivre immé-

Fig. 61.

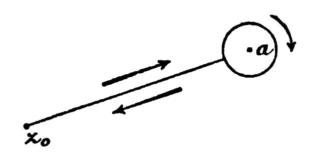


diatement du même segment décrit en sens inverse (ce qui ne change évidemment pas la valeur de l'intégrale), pour obtenir un chemin fermé ($L + z z_0$), suivi du segment $z_0 z$.

On est ainsi amené à étudier les valeurs de l'intégrale proposée *le long des chemins fermés allant de z_0 à z_0*.

152. On introduit, à cet effet, ce qu'on nomme les *lacets* relatifs aux points critiques de $f(z)$, situés dans la région R : ce sont les chemins obtenus comme il suit. On va en ligne droite (ou suivant un autre chemin déterminé) du point z_0 à un point très voisin d'un point critique a; on décrit ensuite autour de a un cercle très

Fig. 62.



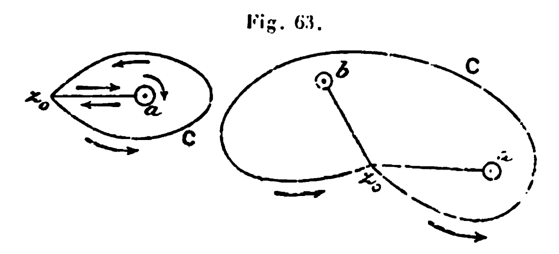
petit, dans un sens ou dans l'autre, et l'on revient en z_0 par le chemin (rectiligne) suivi à l'aller; ce chemin total s'appelle le

lacet a, décrit dans le sens positif ou négatif. On définit de même les lacets relatifs à chacun des autres points critiques.

Je dis maintenant qu'un *chemin fermé quelconque* C, allant de z_0 à z_0, se ramène, au point de vue de la valeur de l'intégrale, à des combinaisons de lacets décrits successivement.

Considérons, par exemple, les chemins C (*fig.* 63), des deux

Fig. 63.



figures suivantes, qui entourent respectivement un et deux points critiques.

Le premier équivaut au lacet a décrit dans le sens positif; car la fonction $f(z)$ est évidemment holomorphe dans la région *à contour simple* comprise entre C et le lacet, et sur son contour; dès lors, en vertu du théorème fondamental de Cauchy, l'intégrale $\int f(z)\,dz$, prise le long du contour total, décrit dans le sens des flèches, est nulle. Sous une autre forme, l'intégrale le long de C, dans le sens positif, est égale à l'intégrale le long du lacet, dans le même sens.

De même, dans la seconde figure, la fonction $f(z)$ étant holomorphe dans la région comprise entre C et les deux lacets, son intégrale suivant C, dans le sens positif, est égale à l'intégrale le long du lacet a, suivie de l'intégrale le long du lacet b.

On verrait aisément qu'il en est de même dans tous les cas. Appliquons maintenant ces principes à quelques exemples.

153. Étude de l'intégrale $\int_0^z \frac{dz}{z-1}$. — L'intégrale est $\log(1-z)$; mais on peut l'étudier directement par la méthode générale qui vient d'être indiquée.

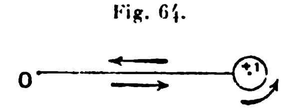
La fonction $f(z)$ est ici $\frac{1}{z-1}$; elle n'a comme point critique

qu'un pôle $z = 1$. D'après ce qui précède, si l'on pose

$$F(z) = \int_0^z \frac{dz}{z-1},$$

les diverses valeurs de $F(z)$ s'obtiendront toutes en prenant comme ligne d'intégration une série de lacets, suivis du segment rectiligne Oz. Or l'intégrale le long du lacet $+1$ (*fig.* 64), par-

Fig. 64.



couru dans le sens direct, s'obtient immédiatement par le théorème des résidus : ce lacet est, en effet, un contour simple, renfermant un pôle de la fonction méromorphe $\frac{1}{z-1}$, et, par suite, l'intégrale correspondante est $2\pi i A_1$, A_1 désignant le résidu de $\frac{1}{z-1}$ par rapport au pôle $z = 1$. Ce résidu est évidemment $+1$, de sorte que l'intégrale le long du lacet, dans le sens positif, est $2\pi i$; elle serait $-2\pi i$ dans le sens inverse.

Si l'on décrit le lacet un nombre de fois quelconque et dans des sens quelconques, l'intégrale le long de ce chemin aura évidemment pour valeur $2n\pi i$, n étant un entier, positif ou négatif; à cela, pour avoir la valeur la plus générale de $F(z)$, il faut ajouter l'intégrale $\int \frac{dz}{z-1}$, prise le long du segment rectiligne Oz, intégrale qui a une valeur parfaitement déterminée et *indépendante du nombre et du sens des lacets décrits auparavant*, puisque la fonction $\frac{1}{z-1}$ n'a qu'une valeur en chaque point du plan.

Donc enfin, l'intégrale proposée $\int_0^z \frac{dz}{z-1}$ a, pour une valeur donnée de sa limite supérieure z, une infinité de valeurs, comprises dans la formule $2n\pi i + U$, où U est l'intégrale le long du segment Oz.

Ce résultat pouvait être prévu, puisque l'intégrale indéfinie est un logarithme, fonction qui n'est définie qu'à $2n\pi i$ près.

154. Autre exemple. — Si l'on pose

$$F(z) = \int_0^z \frac{dz}{1+z^2},$$

la fonction sous le signe $\int$ a, comme points critiques, les deux pôles $z = +i$ et $z = -i$, simples chacun; les résidus relatifs à chacun d'eux sont $\frac{1}{2i}$ et $-\frac{1}{2i}$, de sorte que l'intégrale le long du lacet $+i$ est π, dans le sens direct, et $-\pi$ dans le sens inverse. Pour le lacet $-i$, ce sera $-\pi$ et $+\pi$. Par suite, l'intégrale le long d'une suite quelconque de lacets, décrits dans des sens quelconques, aura pour valeur $n\pi$, n étant entier, et les valeurs de l'intégrale $F(z)$ seront comprises dans la formule $n\pi + U$, où U est l'intégrale prise le long du segment rectiligne Oz.

Ce résultat pouvait être aussi prévu, car l'intégrale (au moins dans le champ réel) est $\operatorname{arc\,tang} z$, et l'arc tang n'est déterminé qu'à $n\pi$ près.

155. Remarque. — Quand z est imaginaire, on définit $\operatorname{arc\,tang} z$ comme la fonction inverse de $\operatorname{tang} z$, c'est-à-dire que si l'on pose $z = \operatorname{tang} u$, on aura $u = \operatorname{arc\,tang} z$. La formule $z = \operatorname{tang} u$ s'écrit

$$z = \frac{\sin u}{\cos u} = \frac{1}{i}\,\frac{e^{iu} - e^{-iu}}{e^{iu} + e^{-iu}} = \frac{1}{i}\,\frac{e^{2iu} - 1}{e^{2iu} + 1},$$

d'où

$$e^{2iu} = \frac{1 + iz}{1 + iz} \qquad \text{et} \qquad u = \frac{1}{2i}\log\frac{1+iz}{1-iz} + n\pi,$$

puisque le log n'est déterminé qu'à la constante $2ni\pi$ près. La fonction u, ou $\operatorname{arc\,tang} z$, a donc une infinité de valeurs différant entre elles de $n\pi$, comme dans le cas réel. Sa dérivée est encore $\frac{1}{1+z^2}$, car en dérivant par rapport à z les deux membres de la relation $z = \operatorname{tang} u$, il vient

$$1 = (1 + \operatorname{tang}^2 u)\,u'_z,$$

d'où

$$u'_z = \frac{1}{1+z^2}.$$

On définit de même $u = \arcsin z$ comme la fonction inverse du

sinus, en posant $z = \sin u$, ce qui donne

$$2iz = e^{iu} - e^{-iu},$$

d'où

$$e^{iu} = iz \pm \sqrt{1-z^2}, \qquad u = \frac{1}{i}\log(iz \pm \sqrt{1-z^2}) + 2n\pi.$$

Pour une valeur de z, arcsin z a donc, à cause du signe $\pm$, deux séries de valeurs, différant de multiples de 2π dans chaque série : la somme de deux valeurs appartenant à des séries différentes est de la forme $(2k+1)\pi$; car en observant que $\log A + \log B = \log AB$, on a :

$$\frac{1}{i}\log(iz + \sqrt{1-z^2}) + \frac{1}{i}\log(iz - \sqrt{1-z^2}) = \frac{1}{i}\log(-1) = (2k+1)\pi,$$

puisque l'une des valeurs de $\log(-1)$ est πi.

Enfin la dérivée de arcsin z est $\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$: on l'établit de suite, par la méthode employée pour l'arc tang.

156. Étude de l'intégrale $\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$. — Cette fonction, qui est évidemment arc sin z, peut être étudiée directement. Posons

$$(1) \qquad \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = F(z),$$

en prenant l'intégrale le long d'une ligne quelconque allant de O à z, et en supposant qu'on parte de O avec la valeur $+1$ du radical $\sqrt{1-z^2}$.

Les points critiques de $\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$ sont $z = \pm 1$; ce sont cette fois des points de branchement. Comme dans le cas général, au point de vue de la valeur de l'intégrale, une ligne quelconque, allant de O à z, peut être remplacée par une succession de lacets suivie du segment rectiligne Oz.

La valeur de l'intégrale le long du lacet $+1$ s'obtient comme il suit :

Partons de O avec la valeur $+1$ du radical $\sqrt{1-z^2}$, et décrivons le lacet $+1$ dans un sens quelconque; l'intégrale le long du

lacet se compose : 1° de l'intégrale rectiligne suivant Om (*fig.* 65), dont la limite, quand le rayon du petit cercle tend vers zéro, est l'intégrale réelle

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = (\text{arc}\sin x)_0^1 = \frac{\pi}{2};$$

2° de l'intégrale suivant la petite circonférence, nulle à la limite, car $\frac{z-1}{\sqrt{1-z^2}}$ tend vers zéro pour $z=1$ (n° **142**, lemme I); 3° de l'intégrale de retour suivant mO : celle-ci est égale à la première,

Fig. 65.



car la rotation autour du point $+1$ a changé le signe de $\sqrt{1-z}$ (n° **97**) et, par suite, celui de $\sqrt{1-z^2}=\sqrt{1-z}\sqrt{1+z}$; dz change également de signe dans le retour, de sorte que $\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$ reprend, en chaque point de Om, la même valeur au retour qu'à l'aller.

L'intégrale le long du lacet $+1$ est donc π, quand la valeur du radical au départ est $+1$; elle serait évidemment $-\pi$ avec la valeur initiale -1.

De même, l'intégrale le long du lacet -1 a pour valeur

$$2\int_0^{-1} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = -\pi,$$

le signe initial du radical étant $+$; elle est $+\pi$ si ce signe est $-$.

Observons enfin que si l'on décrit successivement le lacet $+1$ et le lacet -1, en partant au début avec la valeur $+1$ du radical, l'intégrale, le long de ce chemin, est $\pi+\pi=2\pi$; car, après le parcours du lacet $+1$, on est revenu en O avec la valeur -1 du radical et le second lacet est décrit, dès lors, avec cette valeur initiale. De même, si l'on décrit deux fois de suite le lacet $+1$, l'intégrale le long de ce chemin est $\pi-\pi$, c'est-à-dire zéro.

157. Soit maintenant U la valeur de l'intégrale le long du segment rectiligne Oz, la valeur initiale du radical étant $+1$;

d'après le numéro précédent, la valeur la plus générale de l'intégrale

$$F(z) = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$$

s'obtient en prenant pour ligne d'intégration une suite de lacets, suivie du segment rectiligne Oz. Si, avant de décrire Oz, on a décrit seulement le lacet $+1$, l'intégrale le long de ce chemin est $\pi - U$ (¹); si l'on a décrit le lacet $+1$, puis le lacet -1, puis Oz, l'intégrale correspondante est $2\pi + U$.

En décrivant une suite quelconque de lacets avant de décrire Oz, on voit par là que l'intégrale correspondante est $2m\pi + U$ ou $(2n+1)\pi - U$, selon que le nombre des lacets décrits a été pair ou impair; et finalement les valeurs de l'intégrale $F(z)$ pour une valeur donnée de z sont comprises dans les formules

$$2m\pi + U, \qquad (2n+1)\pi - U.$$

Tel est le résultat cherché; on le met sous une forme plus intéressante en introduisant la *fonction inverse* de l'intégrale.

Posons en effet

$$u = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}},$$

et regardons z comme fonction de u; $z = \varphi(u)$. *Admettons* qu'on ait établi que z est une fonction *monodrome* de u (en fait, $z = \sin u$); d'après ce qui précède, à une même valeur de z correspondent, pour u, les valeurs $2m\pi + U$, $(2n+1)\pi - U$; donc, inversement, aux valeurs $2m\pi + u$ et $(2n+1)\pi - u$, de la variable u, correspond une seule et même valeur de z.

On a donc

$$\varphi(2m\pi + u) = \varphi(u) = \varphi(\pi - u),$$

c'est-à-dire que $\varphi(u)$ admet la période de 2π, et que

$$\varphi(\pi - u) = \varphi(u).$$

On retrouve ainsi les propriétés connues de l'arc sin ou du sinus,

(¹) Le signe — devant U provient de ce que, après le parcours du lacet $+1$ on est revenu en O avec le signe — du radical; le segment Oz est donc décrit avec la valeur initiale -1, d'où $-U$ pour l'intégrale correspondante.

par une méthode dont la portée est évidemment considérable. On va l'appliquer à un exemple moins élémentaire.

158. Étude de l'intégrale elliptique de première espèce. — Prenons cette intégrale (Tome I, n° 245) sous la forme $\int \frac{dz}{\sqrt{Z}}$, Z désignant un polynome de troisième ordre, à coefficients réels ou non, et dont nous appellerons les racines e_1, e_2, e_3.

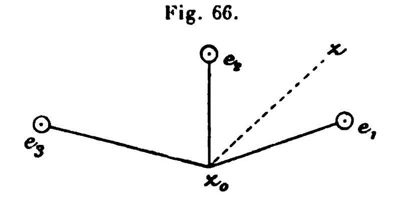
Posons

$$u = u_0 + \int_{z_0}^{z} \frac{dz}{\sqrt{Z}}, \tag{2}$$

u_0 et z_0 étant des constantes quelconques.

Formons les lacets relatifs aux trois points critiques e_1, e_2, e_3 (*fig.* 66), en partant du point z_0; d'après les n°s 151 et 152, la

Fig. 66.



valeur la plus générale de l'intégrale, quand on déforme arbitrairement la ligne d'intégration qui va de z_0 à z, s'obtient en prenant pour ligne d'intégration une suite de lacets, suivie du segment $z_0 z$.

L'intégrale le long du lacet e_1 est égale (n° 156) à deux fois l'intégrale rectiligne $\int_{z_0}^{e_1} \frac{dz}{\sqrt{Z}}$; on posera

$$\int_{z_0}^{e_\alpha} \frac{dz}{\sqrt{Z}} = A_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, 3), \tag{3}$$

en supposant que dans les trois intégrales, on parte de z_0 avec une valeur déterminée $\sqrt{Z_0}$, du radical $\sqrt{Z}$.

L'intégrale $\int \frac{dz}{\sqrt{Z}}$, le long d'un chemin formé des lacets e_α, e_β, e_γ, ..., décrits successivement, sera donc, la valeur initiale du radical étant $\sqrt{Z_0}$,

$$2A_\alpha - 2A_\beta + 2A_\gamma - \dots;$$

le signe — devant $2A_\beta$ provenant de ce que le parcours du lacet e_α a changé le signe du radical.

Si maintenant U est la valeur de l'intégrale suivant le segment z_0z, la valeur initiale du radical étant $\sqrt{Z_0}$, *les valeurs de la fonction u, définie par* (2), *pour une même valeur de z*, seront comprises, selon que le nombre des lacets parcourus sera pair ou impair, dans l'une ou l'autre des formules

$$u = \begin{cases} u_0 + 2A_\alpha - 2A_\beta + 2A_\gamma - 2A_\delta + \ldots + U, \\ u_0 + 2A_\alpha - 2A_\beta + 2A_\gamma - \ldots\ldots\ldots\ldots - U, \end{cases}$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ désignant les chiffres 1, 2, 3 dans un ordre quelconque et étant en nombre pair dans la première formule, impair dans la seconde.

Réunissons dans ces formules les termes en A_1, A_2, A_3; elles deviennent

$$u = \begin{cases} u_0 + 2m_1 A_1 + 2m_2 A_2 + 2m_3 A_3 + U, & \text{avec} \quad m_1 + m_2 + m_3 = 0, \\ u_0 + 2m'_1 A_1 + 2m'_2 A_2 + 2m'_3 A_3 - U, & \text{avec} \quad m'_1 + m'_2 + m'_3 = 1; \end{cases}$$

ce qu'on peut écrire

$$u = u_0 + 2m_1 A_1 + 2m_2 A_2 + 2m_3 A_3 + \begin{cases} U \\ 2A_1 - U, \end{cases}$$

m_1, m_2, m_3 étant des entiers quelconques, *de somme nulle*.

Posons maintenant, pour simplifier,

$$(4) \quad \omega_1 = A_3 - A_2, \quad \omega_2 = A_1 - A_3, \quad \omega_3 = A_2 - A_1, \quad (\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0);$$

on pourra écrire

$$u = u_0 + 2m_1(A_1 - A_3) - 2m_2(A_3 - A_2)$$
$$+ 2(m_1 + m_2 + m_3) A_3 + \begin{cases} U \\ 2A_1 - U; \end{cases}$$

c'est-à-dire, puisque $m_1 + m_2 + m_3$ est nul, que les *valeurs de u, pour une même valeur de z*, sont comprises dans les formules

$$(5) \qquad u = 2m_1\omega_2 - 2m_2\omega_1 + \begin{cases} u_0 + U \\ u_0 + 2A_1 - U, \end{cases}$$

m_1 et m_2 étant des entiers quelconques.

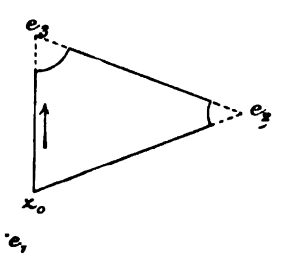
159. De là résultent d'importantes conséquences.

Observons d'abord que les quantités (dites *périodes*) $2\omega_1$, $2\omega_2$, $2\omega_3$ ne dépendent pas des constantes u_0, z_0, mais seulement de e_1, e_2, e_3. On a en effet, par (3) et (4),

$$\omega_1 = A_3 - A_2 = \int_{z_0}^{e_3} \frac{dz}{\sqrt{Z}} - \int_{z_0}^{e_2} \frac{dz}{\sqrt{Z}},$$

les intégrales étant prises le long des segments $z_0 e_2$, $z_0 e_3$ (*fig.* 67). Or si le point z_0 (*fig.* 67) est à l'intérieur du triangle e_1, e_2, e_3 (ce qu'on peut toujours supposer, puisque ce point est arbitraire), le

Fig. 67.



contour ci-dessus (traits pleins), formé par les côtés du triangle $z_0 e_3 e_2$, interrompus par deux arcs de cercle infiniment petits de centres e_3 et e_2, ne contient à son intérieur aucun point critique du radical $\sqrt{Z}$, qui est holomorphe dans cette région ; donc l'intégrale $\int \frac{dz}{\sqrt{Z}}$ le long du contour est nulle, c'est-à-dire que l'on a

$$\int_{z_0}^{e_3} + \int_{e_3}^{e_2} + \int_{e_2}^{z_0} = 0.$$

On en tire

$$\int_{z_0}^{e_3} - \int_{z_0}^{e_2} = \int_{e_2}^{e_3},$$

d'où :

$$(6) \quad \omega_1 = \int_{e_2}^{e_3} \frac{dz}{\sqrt{Z}}, \qquad \text{et de même :} \quad \omega_2 = \int_{e_3}^{e_1} \frac{dz}{\sqrt{Z}}, \qquad \omega_3 = \int_{e_1}^{e_2} \frac{dz}{\sqrt{Z}},$$

expressions indépendantes de z_0 et u_0.

Cela posé, faisons, pour préciser, $u_0 = \omega_1$ et $z_0 = e_1$, ce qui, par (3), donne $A_1 = 0$. On a, dans (2),

$$(7) \qquad u = \omega_1 + \int_{e_1}^{z} \frac{dz}{\sqrt{Z}}.$$

Introduisons maintenant la *fonction inverse* de u, en considérant z comme fonction de u, $z = \varphi(u)$, et *admettons*, ce que nous établirons dans le Chapitre des équations différentielles, que z soit une fonction *monodrome* de u dans tout le plan.

Les valeurs (5) de u, qui répondent à une même valeur de z, sont ici :

$$u = 2m_1\omega_2 - 2m_2\omega_1 + \begin{cases} \omega_1 + U, \\ \omega_1 - U; \end{cases} \tag{8}$$

inversement, à ces valeurs de u correspondent une *seule* et même valeur de $z = \varphi(u)$, puisque $\varphi(u)$ n'a qu'une valeur si u est donné.

1° Donc, en premier lieu, quand on fait varier arbitrairement les entiers m_1 et m_2, la fonction $\varphi(2m_1\omega_2 - 2m_2\omega_1 + \omega_1 + U)$ garde la même valeur; ou, plus simplement, on a

$$\varphi(u + 2\omega_1) = \varphi(u + 2\omega_2) = \varphi(u), \tag{9}$$

c'est-à-dire que $\varphi(u)$ est une fonction *doublement périodique* de u, aux périodes $2\omega_1$, $2\omega_2$. Elle admet aussi la période $2\omega_3$, mais à cause de la relation $-2\omega_3 = 2\omega_1 + 2\omega_2$, cette période résulte immédiatement des deux autres.

2° Toujours d'après (8), à une valeur de z correspondent, à des multiples près des périodes, *deux* valeurs de u, à savoir $\omega_1 + U$ et $\omega_1 - U$, dont la somme est $2\omega_1$. On a donc inversement :

$$\varphi(u) = \varphi(2\omega_1 - u) = \varphi(-u), \tag{10}$$

puisque $2\omega_1$ est une période.

La fonction $\varphi(u)$ est donc *paire*.

3° Faisons successivement, dans (7), $z = e_1, e_2, e_3$; on a, en tenant compte de (6),

$$\text{pour } z = e_1, \qquad u = \omega_1 + \int_{e_1}^{e_1} \frac{dz}{\sqrt{Z}} = \omega_1,$$

$$z = e_2, \qquad u = \omega_1 + \int_{e_1}^{e_2} \frac{dz}{\sqrt{Z}} = \omega_1 + \omega_3,$$

$$z = e_3, \qquad u = \omega_1 + \int_{e_1}^{e_3} \frac{dz}{\sqrt{Z}} = \omega_1 - \omega_2,$$

d'où l'on conclut, en utilisant (9) et (10),

$$e_1 = \varphi(\omega_1), \qquad e_2 = \varphi(\omega_1 + \omega_3) = \varphi(\omega_2),$$
$$e_3 = \varphi(\omega_1 - \omega_2) = \varphi(\omega_1 + \omega_2 - 2\omega_2) = \varphi(\omega_3),$$

c'est-à-dire

$$\varphi(\omega_\alpha) = e_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, 3). \tag{11}$$

Observons, pour terminer, que les équations (6) ne définissent ω_1, ω_2, ω_3 qu'au signe près, parce que le signe change avec celui de $\sqrt{Z}$; mais, quel que soit le signe, on a toujours

$$\varphi(u + 2\omega_\alpha) = \varphi(u);$$

et aussi $\varphi(\omega_\alpha) = e_\alpha$, puisque $\varphi(u)$ est une fonction paire.

160. Remarque. — On voit par là comment les fonctions doublement périodiques s'introduisent naturellement en Analyse par l'*inversion* de l'intégrale elliptique de première espèce; il est à observer que l'inversion des intégrales de seconde ou de troisième espèces ne conduirait pas à des fonctions inverses *monodromes*. C'est Abel qui a eu le premier l'idée d'étudier la fonction inverse, guidé par l'analogie avec l'intégrale qui donne l'arc sinus; il a pu ainsi découvrir la double périodicité, propriété fondamentale, qui avait échappé à Euler et à Legendre.

La théorie des fonctions doublement périodiques peut d'ailleurs s'établir indépendamment de la considération des intégrales elliptiques, et de la manière la plus simple : c'est ce sujet qui va nous occuper maintenant. Nous verrons ensuite comment ces fonctions permettent d'intégrer les différentielles elliptiques, ce qui est leur application principale.

CHAPITRE III.

FONCTIONS ELLIPTIQUES.

I. — GÉNÉRALITÉS.

161. Définitions. — Une fonction $f(u)$, de la variable imaginaire u, admet la période 2ω si l'on a

$$(1)\qquad f(u+2\omega)=f(u).$$

Si elle a plusieurs périodes, 2ω, $2\omega'$, ..., il est clair qu'elle admet aussi la période $2m\omega+2m'\omega'+\ldots$; m, m', ... étant entiers, positifs ou négatifs.

Marquons dans le plan les points $u=2m\omega+2m'\omega'+\ldots$; le segment rectiligne compris entre deux quelconques d'entre eux représente une période, c'est-à-dire que la quantité imaginaire qui a pour module la distance de ces deux points et pour argument l'angle avec Ox de la droite qui les joint, est une période.

On nomme *fonction elliptique* une fonction *méromorphe dans tout le plan, admettant deux périodes:* ce nom vient de la relation de ces fonctions avec l'intégrale qui exprime la longueur de l'arc d'ellipse.

Il est clair que toutes les dérivées d'une fonction elliptique sont elliptiques aux mêmes périodes: car elles sont méromorphes dans tout le plan (n° 132), et l'on déduit de (1), par dérivation,

$$f'(u+2\omega)=f'(u).$$

Théorèmes sur les périodes.

162. Lemme.— *Une fonction méromorphe dans tout le plan, $f(u)$, qui admet une période de module aussi petit qu'on veut, est une constante.*

Soit α cette période; u_0 étant un point non critique pour $f(u)$, on a

$$f(u_0+\alpha)-f(u_0)=0;$$

la fonction $f(u)-f(u_0)$, qui est holomorphe autour de u_0, admet ainsi deux zéros, u_0 et $u_0+\alpha$, aussi voisins qu'on veut l'un de l'autre; elle est donc (n° 127, note) identiquement nulle dans le cercle de Taylor de centre u_0, c'est-à-dire dans un cercle qui a pour centre u_0 et pour rayon la distance de ce point au pôle le plus voisin de $f(u)$. En d'autres termes, $f(u)$ est constant dans ce cercle et, par suite, dans le plan, qui peut évidemment être recouvert par une série de cercles analogues successifs, dont chacun a son centre à l'intérieur de l'un des précédents.

163. Théorème I. — *Le rapport des deux périodes d'une fonction elliptique $f(u)$ est imaginaire.*

Nous nous appuierons sur la remarque suivante [1] :

Soit une suite de quantités positives x, en nombre infini, $x_1, x_2, \ldots$, dont aucune n'est nulle; deux cas pourront se présenter : 1° ou bien une de ces quantités sera inférieure (ou au plus égale) à chacune des autres, c'est-à-dire qu'il existera, dans la suite, un nombre minimum non nul; 2° ou bien étant donnée une quelconque x_n des quantités x, on pourra toujours trouver $x_{n+1}<x_n$, puis $x_{n+2}<x_{n+1}$, et ainsi de suite. On formera ainsi une série infinie de nombres décroissants, $x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots$, qui tendent vers une limite A, car une quantité variable, qui décroît constamment et restant positive, a une limite. En d'autres termes, il y a une infinité de nombres x compris entre A et $A+\varepsilon$, si petit que soit ε.

Cela posé, pour établir le théorème ci-dessus, admettons que le rapport des périodes $2\omega_2$, $2\omega_1$ soit réel : les points $u=2m_1\omega_1+2m_2\omega_2$, que nous appellerons *points-périodes*, sont alors sur une même droite Om, issue de l'origine. Parmi ces points, abstraction faite de O, cherchons les plus rapprochés de O; d'après la remarque précédente, deux cas sont à distinguer :

1° Un des points périodes, P_1, est plus rapproché de l'origine

---

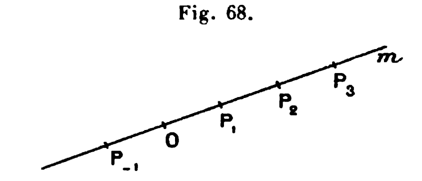
[1] *Voir* à ce sujet le n° 2 du Tome I.

que tous les autres; 2° aucun n'est plus rapproché, c'est-à-dire qu'il y a une infinité de ces points au voisinage d'un point A, de la droite Om.

La seconde hypothèse est inadmissible : en effet, on pourrait toujours trouver, au voisinage de A, deux points-périodes dont la distance soit inférieure à un nombre ε, si petit qu'il soit; il y aurait donc, puisque le segment rectiligne compris entre deux points-périodes représente une période, une période α, de module aussi petit qu'on veut et, par suite en vertu du Lemme, la fonction $f(u)$ serait une constante.

Reste la première hypothèse : il y a (*fig.* 68) un point P_1, au

Fig. 68.



moins aussi rapproché de O que tous les autres. Le segment OP_1 représente alors une période 2Ω, de module minimum ; les points P_2, P_3, ..., P_{-1}, ..., compris dans la formule $2m\Omega$, sont des points-périodes. Je dis qu'il n'y en a pas d'autres : car, s'il en existait un, P, compris entre P_2 et P_3, par exemple, la période représentée par le segment P_2P aurait un module inférieur à P_2P_3, qui est égal à OP_1, c'est-à-dire inférieur à mod 2Ω. Les points-périodes et, par suite, les périodes, sont donc compris dans la formule $2m\Omega$, et il n'y a, en réalité, qu'une seule période, 2Ω.

Corollaire. — Si une fonction elliptique a la période réelle $2\omega_1$, les périodes, autres que $2m_1\omega_1$, sont imaginaires.

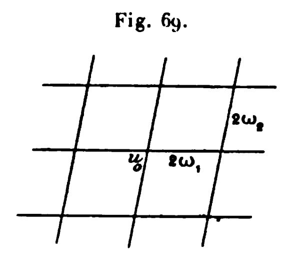
164. Représentation géométrique de la double périodicité. — Le rapport des deux périodes étant imaginaire, les points

$$u = u_0 + 2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2$$

ne sont pas en ligne droite; ils sont les sommets d'un réseau de parallélogrammes dont les côtés représentent les périodes $2\omega_1$, $2\omega_2$, et dont un sommet est le point arbitraire $u = u_0$. Un quelconque de ces parallélogrammes se nomme *parallélogramme des*

périodes. La fonction elliptique $f(u)$ reprend la même valeur en tous les points homologues du réseau; il suffit donc de connaître

Fig. 69.



ses valeurs et ses propriétés à l'intérieur d'un parallélogramme pour les connaître dans tout le plan.

165. Théorème II. — *Une fonction monodrome ne peut admettre plus de deux périodes.*

Supposons, en effet, qu'il y ait trois périodes $2\omega_1$, $2\omega_2$, $2\omega_3$; leurs rapports, deux à deux, seront imaginaires; sinon, d'après le théorème I, la fonction périodique serait une constante, ou les périodes se réduiraient à moins de trois. Considérons, dans le plan, les points-périodes

$$u = 2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2 + 2m_3\omega_3,$$

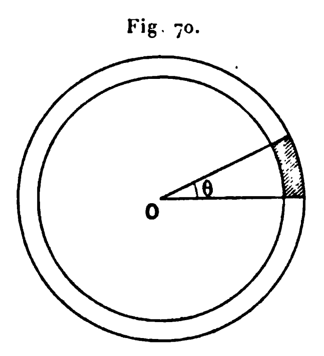
abstraction faite de l'origine O; deux cas sont à distinguer : 1° l'un d'eux est au moins aussi rapproché de l'origine que tous les autres; 2° il y a une infinité de ces points dont la distance à l'origine est aussi voisine qu'on veut d'une limite ρ.

La seconde hypothèse est inadmissible : il y aurait, en effet, entre les circonférences de centre O, de rayons ρ et $\rho + \varepsilon$, une infinité de points-périodes, et, par suite, si l'on divise la couronne en secteurs (*fig.* 70) correspondant à un angle au centre θ, pris aussi petit qu'on veut, un au moins des secteurs comprendrait une infinité de points-périodes. Or, la distance de deux de ces points étant le module d'une période et les dimensions du secteur pouvant devenir aussi petites qu'on veut, on formerait ainsi une période de module inférieur à toute quantité donnée et, par suite (Lemme), la fonction $f(u)$ serait une constante.

Reste donc la *première hypothèse :* il y a un point-période P_1, au moins aussi rapproché de O que tous les autres; soit $2\Omega_1$ la

période, de module minimum, représentée par le segment OP_1. Supprimons maintenant le point P_1 et tous les points-périodes situés sur la droite OP_1; le même raisonnement montre que,

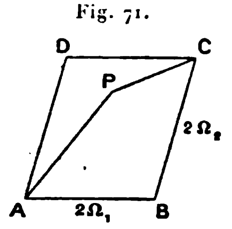
Fig. 70.



parmi les points-périodes restants (et il en reste, sinon tous ces points seraient en ligne droite, et les rapports deux à deux de $2\omega_1$, $2\omega_2$, $2\omega_3$ seraient réels), il y a un point P_2, au moins aussi rapproché de O que tous les autres : la période $2\Omega_2$, représentée par OP_2, est celle qui a le module minimum parmi toutes les périodes dont le segment représentatif n'est pas parallèle à OP_1. D'ailleurs P_2 n'étant pas sur la droite OP_1, le rapport $\frac{2\Omega_2}{2\Omega_1}$ est imaginaire; on peut donc construire un réseau de parallélogrammes dont les côtés sont les périodes $2\Omega_1$ et $2\Omega_2$, un des sommets du réseau étant l'origine.

Tous les sommets du réseau sont des points-périodes : je dis qu'il n'y en a pas d'autres. En effet, s'il en existait un autre, P, il

Fig. 71.



serait sur les côtés ou à l'intérieur d'un des parallélogrammes ABCD du réseau. Or il ne peut être : 1° ni sur le côté AB (ou CD), car le segment AP (ou CP) représenterait une période de module inférieur à $\bmod 2\Omega_1$; 2° ni sur le côté AD (ou BC), car le segment AP (ou CP) représenterait une période, de segment repré-

sentatif non parallèle à AB, et de module inférieur à $\bmod 2\Omega_2$; 3° ni à l'intérieur du parallélogramme, car l'inégalité évidente $AP + PC < AD + DC < 2AD$, c'est-à-dire $< 2 \bmod 2\Omega_2$, montre que l'une des périodes représentées par AP et PC aurait son module inférieur à $\bmod 2\Omega_2$.

Les points-périodes, c'est-à-dire les périodes, sont donc tous compris dans la formule $2m_1\Omega_1 + 2m_2\Omega_2$, et il n'y a en réalité que deux périodes, $2\Omega_1$ et $2\Omega_2$.

L'impossibilité de trois périodes et, *a fortiori*, d'un plus grand nombre, est donc établie. De plus, le raisonnement montre qu'on peut toujours, parmi les périodes, en trouver deux, $2\Omega_1$ et $2\Omega_2$, dont toutes les autres se déduisent : un tel couple est dit *couple primitif* de périodes.

Théorèmes sur les fonctions elliptiques.

166. Théorème III. — *Une fonction elliptique qui ne devient pas infinie est une constante.*

En effet, la fonction étant, par définition, méromorphe dans tout le plan, et ne devenant jamais infinie, n'a pas de pôles; elle est donc holomorphe dans tout le plan; son module, dans un parallélogramme, *et par suite dans le plan*, est limité; donc (n° **125**), cette fonction se réduit à une constante.

Ordre d'une fonction elliptique. — On dit qu'une fonction elliptique est d'ordre n si elle a n pôles dans un parallélogramme des périodes, un pôle double étant compté pour deux et ainsi de suite. Il est clair que si $f(u)$ est d'ordre n, $f^2(u)$ est d'ordre $2n$; si $\varphi(u)$ est d'ordre m, $f(u)\,\varphi(u)$ est d'ordre $m+n$.

167. Théorème IV. — *La somme des résidus d'une fonction elliptique $f(u)$, par rapport aux pôles situés dans un parallélogramme des périodes, est nulle.*

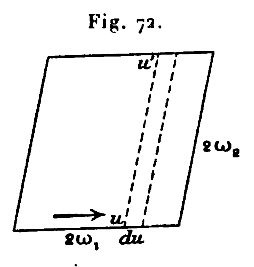
Car elle est égale, en vertu du théorème des résidus (n° **134**), à l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int f(u)\,du,$$

prise sur le contour du parallélogramme, dans le sens positif.

Or les intégrales relatives à deux côtés opposés se détruisent, puisqu'en deux points correspondants (situés sur une même paral-

Fig. 72.



lèle à l'autre côté), tels que u et u', $f(u)$ a la même valeur, et du a des valeurs égales et de signes contraires, en raison du sens de parcours.

168. **Corollaire.** — *Il n'y a pas de fonction elliptique d'ordre* un. Car une telle fonction n'aurait qu'un pôle *simple;* son développement autour de ce pôle a serait donc de la forme (n° 129) :

$$f(u) = \frac{A}{u-a} + B_0 + B_1(u-a) + \ldots,$$

A désignant le résidu; la somme des résidus relatifs aux pôles intérieurs à un même parallélogramme étant nulle, on aurait $A = 0$, et a ne serait pas un pôle.

169. **Théorème V.** — *Une fonction elliptique a autant de zéros que de pôles dans un parallélogramme des périodes.*

Car la différence $m - n$, entre le nombre de zéros et celui des pôles, est égale (n° 135) à l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{f'(u)}{f(u)}\,du,$$

prise le long du contour du parallélogramme dans le sens positif. Or cette intégrale est nulle, car la fonction $f'(u)$ admettant les mêmes périodes que $f(u)$, la fonction sous le signe $\int$ est elliptique, et les intégrales relatives aux côtés opposés se détruisent (n° 167).

Corollaire. — Soient $f(u)$ une fonction elliptique d'ordre n et c une constante : l'équation $f(u) = c$ a n solutions dans chaque parallélogramme, car la fonction elliptique $f(u) - c$ a évidemment les mêmes pôles que $f(u)$: elle est donc du même ordre n, et a dès lors n zéros dans un parallélogramme.

170. Théorème VI. — *La somme des valeurs des zéros d'une fonction elliptique est égale à celle des valeurs des pôles contenus dans le même parallélogramme, à une période près.*

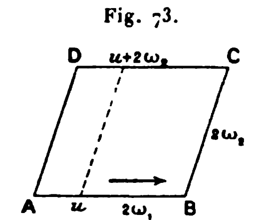
En effet, la différence entre la somme des valeurs des zéros et celle des valeurs des pôles, dans un même parallélogramme, est égale (n° 135) à l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{f'(u)}{f(u)}\, u\, du,$$

prise dans le sens positif, le long du contour du parallélogramme.

Or, si l'on désigne par u un point du côté AB (*fig.* 73) et par

Fig. 73.



$z = u + 2\omega_2$ le point correspondant du côté CD, quand le point z décrit CD, le point u décrit BA, de sorte que l'on a :

$$\int_{CD} \frac{f'(z)}{f(z)} z\, dz = \int_{BA} \frac{f'(u+2\omega_2)}{f(u+2\omega_2)}(u+2\omega_2)\, du = -\int_{AB} \frac{f'(u)}{f(u)}(u+2\omega_2)\, du,$$

d'où l'on tire

$$\int_{AB} \frac{f'(u)}{f(u)} u\, du + \int_{CD} \frac{f'(z)}{f(z)} z\, dz = -\int_{AB} 2\omega_2 \frac{f'(u)}{f(u)}\, du = -2\omega_2[\log f(u)]_A^B.$$

Mais aux points B et A, pour lesquels les valeurs de la variable u diffèrent de $2\omega_1$, $f(u)$ reprend la même valeur; la différence des logarithmes est donc un multiple entier de $2\pi i$, soit $2k_2\pi i$ (car le logarithme n'est défini qu'à une constante $2k\pi i$ près); de

même la somme des intégrales suivant BC et DA donne le terme $2\omega_1 2k_1\pi i$, et l'intégrale qui représente la différence entre les sommes des valeurs des zéros et des pôles est égale à

$$\frac{1}{2\pi i}(-2\omega_2.2k_2\pi i + 2\omega_1.2k_1\pi i) = 2k_1\omega_1 - 2k_2\omega_2,$$

c'est-à-dire à une période.

171. Théorème VII. — *Une fonction elliptique est déterminée : 1° à un facteur constant près lorsque l'on connaît ses zéros et ses pôles dans un parallélogramme avec leur ordre de multiplicité; 2° à une constante additive près lorsque l'on connaît ses pôles et la partie infinie de son développement aux environs de chacun d'eux.*

Car si deux fonctions elliptiques, $f(u)$ et $\varphi(u)$, satisfont aux conditions données, le quotient $\frac{f(u)}{\varphi(u)}$ dans le premier cas, la différence $f(u) - \varphi(u)$ dans le second, sera une fonction elliptique sans pôles dans un parallélogramme, et, par suite (n° **166**), une constante.

II. — LES FONCTIONS FONDAMENTALES ζu, pu, σu.

172. Il y a des fonctions elliptiques : nous allons, en effet, former, d'après Weierstrass, des fonctions particulières permettant d'exprimer toute fonction elliptique.

Soient $2\omega_1$, $2\omega_2$ deux quantités quelconques, de rapport imaginaire; par analogie avec la fonction $\cot u$, formons une fonction, méromorphe dans tout le plan, admettant pour pôles simples les points-périodes $u = 2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2$, avec un résidu égal à 1 pour chacun d'eux.

La méthode du n° 138, 2°, est ici applicable, car je dis que la série

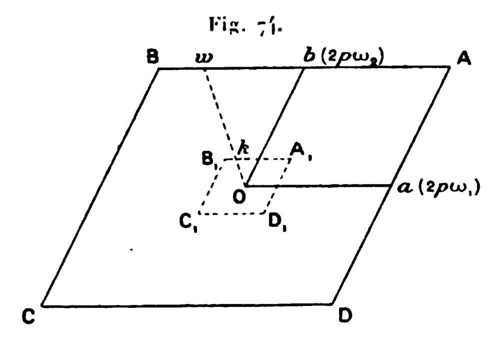
$$\sum{}' \frac{1}{(2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2)^3} \quad \text{ou, pour abréger,} \quad \sum{}' \frac{1}{w^3},$$

où la somme $\sum'$ porte sur tous les systèmes de valeurs entières de m_1 et m_2, de $-\infty$ à $+\infty$, le système $m_1 = m_2 = 0$ excepté, est absolument convergente.

Joignons, en effet, l'origine O (*fig.* 74) aux deux points $u = 2p\omega_1$, $u = 2p\omega_2$ (a et b de la figure), p désignant un entier positif; construisons ensuite le parallélogramme ABCD, de centre O, dont deux côtés, parallèles à Ob et Oa, passent par a et b.

Pour $p = 1$, on a le parallélogramme $A_1 B_1 C_1 D_1$. Considérons

Fig. 74.



maintenant les points-périodes situés sur les côtés de ABCD : il y en a $2p+1$ sur chaque côté, soit en tout $8p+4$, et, en retranchant les quatre sommets qui ont été comptés deux fois, $8p$.

Soit w l'un d'eux; les figures ABCD et $A_1 B_1 C_1 D_1$ sont homothétiques par rapport à O, le rapport de similitude étant p. Donc

$$\operatorname{mod} w = p.\mathrm{O}k,$$

k étant le point homologue de w; et, par suite, si ρ est le rayon d'un cercle intérieur au parallélogramme $A_1 B_1 C_1 D_1$,

$$\operatorname{mod} w > p\rho \qquad \text{ou} \qquad \frac{1}{\operatorname{mod} w} < \frac{1}{p\rho}.$$

Les termes de la série $\sum' \frac{1}{\operatorname{mod} w^3}$, qui correspondent aux $8p$ points-périodes situés sur les côtés de ABCD, ont donc une somme inférieure à

$$8p\left(\frac{1}{p\rho}\right)^3, \qquad \text{c'est-à-dire à} \qquad \frac{8}{\rho^3}\,\frac{1}{p^2};$$

dès lors, la somme de *toute la série* $\sum' \frac{1}{\operatorname{mod}(2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2)^3}$

sera évidemment inférieure à

$$\frac{8}{\rho^3}\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{p^2}+\ldots\right),$$

quantité finie. C. Q. F. D.

173. La fonction ζu. — Cela posé, la méthode du n° 138, 2°, nous fournit une fonction ζu, *méromorphe dans tout le plan*, admettant pour *pôle simple* chacun des points-périodes, avec le résidu $+1$: cette fonction est définie par la série

$$(1)\qquad \zeta u = \frac{1}{u} + \sum{}'\left(\frac{1}{u-w}+\frac{1}{w}+\frac{u}{w^2}\right);$$

w désigne toujours la quantité $2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2$, et la somme $\sum'$, au second membre, porte, comme l'accent est destiné à le rappeler, sur toutes les valeurs entières, négatives et positives, de m_1 et m_2, le système 0,0 excepté. La série (1) est *absolument et uniformément* convergente (n° 138) dans toute région finie R, ne comprenant aucun point-période.

174. La fonction pu. — On pose

$$(2)\qquad pu = -\zeta' u,$$

c'est-à-dire que pu est la dérivée de ζu, changée de signe; pu est donc, comme ζu, une fonction méromorphe dans tout le plan (n° 132); ses *pôles* sont (*ibid.*) les points-périodes, et chacun d'eux est *double*.

La série qui définit ζu étant uniformément convergente dans R, et ses termes holomorphes en u dans cette même région, sa dérivée s'obtient en dérivant terme à terme (n° 117), ce qui donne

$$(3)\qquad pu = \frac{1}{u^2} + \sum{}'\left[\frac{1}{(u-w)^2}-\frac{1}{w^2}\right],$$

et la nouvelle série converge *uniformément* dans R (*ibid.*). Une nouvelle dérivation donne de même

$$(4)\qquad p'u = -\frac{2}{u^3} - 2\sum{}'\frac{1}{(u-w)^3} = -2\sum\frac{1}{(u-w)^3},$$

la dernière somme $\sum$ portant sur toutes les valeurs de w, zéro compris.

Remarque. — Les séries qui donnent pu et $p'u$ sont *absolument* convergentes dans R; montrons-le pour pu, la démonstration est la même pour $p'u$. On a :

$$\text{mod}\left[\frac{1}{(u-w)^2}-\frac{1}{w^2}\right] = \text{mod}\,\frac{2uw-u^2}{w^2(u-w)^2}$$
$$= \text{mod}\left(2u-\frac{u^2}{w}\right)\text{mod}\,\frac{1}{\left(1-\frac{u}{w}\right)^2}\,\text{mod}\,\frac{1}{w^3};$$

les deux premiers facteurs du dernier membre demeurant évidemment limités, quelle que soit la période w ($w \gtrless 0$), lorsque u reste dans R, et la série $\sum' \frac{1}{\text{mod}\, w^3}$ étant convergente (n° 172), la proposition est établie.

175. Propriétés de pu. — 1° C'est une fonction paire de u, car changer u en $-u$ dans (3) revient à changer w en $-w$, c'est-à-dire m_1 et m_2 en $-m_1$ et $-m_2$, opération qui ne fait que déplacer les termes de la série (3); celle-ci étant absolument convergente, on a bien $p(-u) = pu$.

2° Les points $u = w$, comme on l'a vu, sont des pôles doubles de pu; cherchons le développement de pu autour du pôle $u = 0$.

La relation (3) montre que $pu - \frac{1}{u^2}$ n'admet plus le pôle $u = 0$; c'est donc, autour de ce point, une fonction holomorphe, qu'on peut développer en série de Maclaurin, valable dans un cercle ayant pour centre l'origine ($u = 0$), et, pour rayon, la distance de l'origine au pôle le plus voisin de pu.

Soit $pu - \frac{1}{u^2} = \varphi(u)$, on a

$$\varphi(u) = \sum'\left[\frac{1}{(u-w)^2}-\frac{1}{w^2}\right], \quad \text{d'où} \quad \varphi(0) = 0,$$
$$\varphi'(u) = -2\sum'\frac{1}{(u-w)^3}, \quad \text{d'où} \quad \varphi'(0) = 2\sum'\frac{1}{w^3} = 0\ (^1),$$
$$\varphi''(u) = 6\sum'\frac{1}{(u-w)^4}, \quad \text{d'où} \quad \varphi''(0) = 6\sum'\frac{1}{w^4},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

---

[1] Car à une quantité w correspond une quantité $-w$, et la somme des inverses des cubes de ces deux quantités est nulle. De même les dérivées d'ordre impair de $\varphi(u)$ sont nulles pour $u = 0$.

La formule de Maclaurin

$$\varphi(u) = \varphi(0) + u\varphi'(0) + \frac{u^2}{1.2}\varphi''(0) + \ldots$$

donne donc ici :

$$(5) \qquad pu = \frac{1}{u^2} + c_1 u^2 + c_2 u^4 + \ldots + c_n u^{2n} + \ldots,$$

étant posé

$$(6) \qquad c_1 = 3\sum{}' \frac{1}{w^4}, \qquad c_2 = 5\sum{}' \frac{1}{w^6}, \qquad \ldots.$$

Le développement (5) montre bien que pu est une fonction paire; il est à observer qu'il ne renferme pas de terme constant.

3° *La fonction pu est elliptique, aux périodes* $2\omega_1$, $2\omega_2$. — Montrons d'abord que $p'u$ jouit de cette propriété. A cet effet, changeons u en $u + 2\omega_1$, dans l'expression (4) de $p'u$; cela revient à remplacer w par $w - 2\omega_1$, c'est-à-dire m_1 par $m_1 - 1$, opération qui ne fait que déplacer les termes de la série; celle-ci étant absolument convergente, comme on l'a vu plus haut, demeure inaltérée. La fonction $p'u$ admet donc les deux périodes $2\omega_1$, $2\omega_2$.

Or la relation

$$p'(u + 2\omega_1) - p'u = 0$$

montre que la fonction

$$p(u + 2\omega_1) - pu$$

est une constante c; pour la déterminer faisons $u = -\omega_1$; il vient

$$c = p(\omega_1) - p(-\omega_1) = 0,$$

puisque pu est paire. Donc pu admet bien les périodes $2\omega_1$, $2\omega_2$; c'est une fonction elliptique. Elle est *d'ordre deux*, car, dans un parallélogramme des périodes contenant l'origine, elle n'a que le pôle double $u = 0$.

Remarque. — pu n'a pas de période plus simple que $2\omega_1$ et $2\omega_2$, c'est-à-dire que toute période, 2Ω, de pu est de la forme $2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2$. En effet, $p(2\Omega)$, égal à $p(0)$, est infini, et comme, d'après (3), pu n'a pas d'autres pôles que les quantités w,

on a bien

$$\Omega = 2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2.$$

176. Propriétés de ζu. — 1° C'est une fonction impaire de u : car, si, dans le second membre de (1), on change w en $-w$, on n'altère pas la série, cette opération ne faisant que déplacer les termes; si l'on change à la fois w en $-w$ et u en $-u$, tous les termes changent de signe, et, par suite,

$$\zeta(-u) = -\zeta u.$$

2° Les points-périodes sont, on l'a vu, les pôles (simples) de ζu; le développement autour du pôle $u = 0$ se déduit de celui de pu. On a

$$pu = \frac{1}{u^2} + c_1 u^2 + c_2 u^4 + \ldots,$$

d'où, en intégrant,

$$\zeta u = \frac{1}{u} - \frac{c_1}{3}u^3 - \frac{c_2}{5}u^5 - \ldots + C;$$

la constante C est nulle, car ζu doit changer de signe avec u : donc

(7) $$\zeta u = \frac{1}{u} - \frac{c_1}{3}u^3 - \frac{c_2}{5}u^5 - \ldots,$$

développement valable dans un cercle ayant pour centre $u = 0$, et pour rayon la distance de ce point au pôle le plus voisin de ζu.

Observons que cette série ne renferme pas de terme en u.

3° La fonction ζu n'est pas elliptique; de l'équation

$$p(u + 2\omega_1) = pu,$$

on déduit, en remontant aux primitives,

$$\zeta(u + 2\omega_1) = \zeta u + 2\eta_1,$$

et l'on détermine la constante η_1 en faisant $u = -\omega_1$; ζ étant impaire, il vient

$$\eta_1 = \zeta\omega_1.$$

Si l'on pose de même

$$\eta_2 = \zeta\omega_2, \qquad \eta_3 = \zeta\omega_3,$$

$2\omega_3$ étant une période introduite pour la symétrie et définie par

$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0,$$

on aura

(8) $$\zeta(u+2\omega_\alpha) = \zeta u + 2\eta_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, 3).$$

On en conclut

$$\zeta(u+2\omega_1+2\omega_2+2\omega_3) = \zeta u + 2\eta_1 + 2\eta_2 + 2\eta_3;$$

et, puisque $\omega_1+\omega_2+\omega_3$ est nul,

(9) $$\eta_1+\eta_2+\eta_3 = 0.$$

177. La fonction σu. — Introduisons une troisième fonction, σu, définie par la relation

(10) $$\sigma u = u e^{\int_0^u \left(\zeta u - \frac{1}{u}\right) du},$$

qui entraîne celle-ci :

(11) $$\frac{\sigma' u}{\sigma u} = \zeta u.$$

Je dis que σu est une *fonction entière*.

Observons d'abord que $\zeta u - \frac{1}{u}$ ne devient pas infini, d'après (7), pour l'origine $O(u=0)$, point de départ de l'intégrale

(12) $$\int_0^u \left(\zeta u - \frac{1}{u}\right) du;$$

quant à cette intégrale, elle prend des valeurs différentes selon le choix de l'arc d'intégration.

Soit L_0 un arc particulier allant de O à u, sans traverser de pôle de $\zeta u - \frac{1}{u}$; l'intégrale (12), le long d'un arc quelconque de O à u, est égale (n° 151) à l'intégrale le long d'un chemin fermé C, allant de O à O, suivi de l'intégrale suivant L_0; or l'intégrale le long de C a pour valeur la somme des résidus de $\zeta u - \frac{1}{u}$, relatifs aux pôles intérieurs à C, multipliée par $2\pi i$, et comme tous les résidus de ζu sont égaux à $+1$, on voit finalement que l'expression générale de l'intégrale (12) est de la forme $2n\pi i + U$, U étant une fonction déterminée de u, et n un entier.

A cette valeur de l'intégrale correspond, par (10), puisque

$e^{2n\pi i} = 1$, une seule valeur de $\sigma(u)$; donc σu est uniforme dans tout le plan.

Les points critiques *possibles* de σu sont d'ailleurs (n° **100**, *Remarque*) ceux de l'intégrale (12), c'est-à-dire (n° **110**) ceux de la fonction $\zeta u - \frac{1}{u}$, ou les pôles de ζu, le point $u = 0$ excepté.

Mais, au voisinage du pôle $u = w$, on a, puisque ce pôle est simple pour ζu, avec le résidu $+1$,

$$\zeta u = \frac{1}{u - w} + \varphi(u),$$

$\varphi(u)$ étant holomorphe autour du pôle. La relation (11)

$$\frac{\sigma' u}{\sigma u} = \zeta u = \frac{1}{u - w} + \varphi(u),$$

donne alors, par intégration, au voisinage du pôle $u = w$,

$$\log \sigma u = \log(u - w) + \psi(u) + C,$$

et la fonction $\psi(u)$, ou $\int \varphi(u)\, du$, est holomorphe autour de ce point (n° **110**); on en conclut

$$\sigma u = (u - w) e^{\psi(u) + C},$$

ce qui montre que le point $u = w$ est ordinaire pour σu, et que c'est un zéro d'ordre *un*.

Donc enfin, la fonction uniforme σu, admettant pour points ordinaires tous les points du plan, est une fonction entière.

Remarque. — On peut exprimer σu sous forme de produit infini; car on a, par (1),

$$\zeta u - \frac{1}{u} = \sum{}' \left(\frac{1}{u - w} + \frac{1}{w} + \frac{u}{w^2} \right),$$

d'où, puisque la série est uniformément convergente (n° **117**, 1°),

$$\int_0^u \left(\zeta u - \frac{1}{u} \right) du = \sum{}' \left[\log\left(1 - \frac{u}{w}\right) + \frac{u}{w} + \frac{u^2}{2 w^2} \right]$$

et

$$(12') \qquad \sigma u = u e^{\int_0^u \left(\zeta u - \frac{1}{u}\right) du} = u \prod{}' \left(1 - \frac{u}{w}\right) e^{\frac{u}{w} + \frac{u^2}{2w^2}};$$

le produit $\prod'$ s'étendant à toutes les quantités

$$w = 2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2,$$

zéro excepté. Cette formule montre que σu n'a pas d'autres zéros que les points-périodes $u = w$, qui sont des zéros simples.

178. Propriétés de σu. — 1° La fonction σu est impaire, car on a

$$\sigma(-u) = -u e^{\int_0^{-u}\left(\zeta u' - \frac{1}{u'}\right)du'},$$

d'où, en posant $u' = -v$ dans l'intégrale,

$$\sigma(-u) = -u e^{\int_0^{u}\left(\zeta v - \frac{1}{v}\right)dv} = -\sigma u.$$

2° σu, fonction entière, est développable dans tout le plan en série de Maclaurin. Or on a, autour de l'origine $u = 0$,

$$\zeta u = \frac{1}{u} - \frac{c_1}{3}u^3 - \frac{c_2}{5}u^5 - \ldots,$$

d'où, en intégrant,

$$\log\sigma u = \log u - \frac{c_1}{12}u^4 - \frac{c_2}{30}u^6 - \ldots,$$

et la constante d'intégration est nulle, puisque, d'après (10), $\frac{\sigma u}{u}$ est égal à 1 pour $u = 0$. Donc

$$(13)\qquad \sigma u = u e^{-\frac{c_1}{12}u^4 - \frac{c_2}{30}u^6 - \ldots} = u(1 + d_1 u^4 + d_2 u^6 + \ldots),$$

$d_1, d_2, \ldots$ étant des polynomes en $c_1, c_2, \ldots$. Ce développement ne renferme pas de terme en u^3.

3° De la relation (8), $\zeta(u + 2\omega_\alpha) = \zeta u + 2\eta_\alpha$, on tire, en intégrant,

$$\log\sigma(u + 2\omega_\alpha) = \log\sigma u + 2\eta_\alpha u + \log C_\alpha,$$

d'où

$$\sigma(u + 2\omega_\alpha) = C_\alpha e^{2\eta_\alpha u}\sigma u.$$

Pour déterminer la constante C_α, faisons, dans cette formule, $u = -\omega_\alpha$; il vient, puisque σu est impaire, $C_\alpha = -e^{2\eta_\alpha\omega_\alpha}$, et,

par suite,

(14) $$\sigma(u+2\omega_\alpha)\, = -e^{2\eta_\alpha(u+\omega_\alpha)}\sigma u \qquad (\alpha = 1, 2, 3).$$

179. Formules d'homogénéité. — Les formules

$$p(u, 2\omega_1, 2\omega_2) = \frac{1}{u^2} + \sum{}' \left[\frac{1}{(u-w)^2} - \frac{1}{w^2}\right],$$

$$\zeta(u, 2\omega_1, 2\omega_2) = \frac{1}{u} + \sum{}' \left(\frac{1}{u-w} + \frac{1}{w} + \frac{u}{w^2}\right),$$

$$\sigma(u, 2\omega_1, 2\omega_2) = u \prod{}' e^{\frac{u}{w}+\frac{u^2}{2w^2}}\left(1 - \frac{u}{w}\right)$$

$$(w = 2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2),$$

donnent immédiatement

$$p(\mu u, 2\mu\omega_1, 2\mu\omega_2) = \frac{1}{\mu^2} p(u, 2\omega_1, 2\omega_2),$$

$$\zeta(\mu u, 2\mu\omega_1, 2\mu\omega_2) = \frac{1}{\mu}\zeta(u, 2\omega_1, 2\omega_2),$$

$$\sigma(\mu u, 2\mu\omega_1, 2\mu\omega_2) = \mu\,\sigma(u, 2\omega_1, 2\omega_2),$$

μ désignant un paramètre arbitraire.

180. Remarque I. — On a ainsi formé une fonction pu, jouissant des propriétés suivantes :

1° Elle est elliptique, et ses périodes sont deux quantités quelconques, $2\omega_1$, $2\omega_2$, de rapport imaginaire.

2° Elle est d'ordre deux; ses pôles, dont chacun est double, sont les points périodes, $u = 2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2$.

3° Autour du pôle $u = 0$, le développement de pu est de la forme

(5) $$pu = \frac{1}{u^2} + \text{termes ayant } u \text{ en facteur.}$$

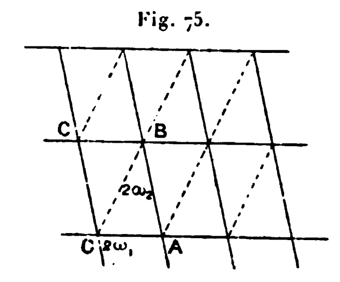
Je dis qu'il n'y a qu'une fonction satisfaisant à ces trois conditions. En effet, s'il en existait une seconde, $f(u)$, ayant aussi, autour du point $u = 0$, le développement

(5 *bis*) $$f(u) = \frac{1}{u^2} + \text{termes ayant } u \text{ en facteur,}$$

$pu - f(u)$ serait une fonction elliptique sans pôles dans un parallélogramme des périodes, car elle ne devient plus infinie pour $u = 0$; ce serait donc (n° **166**) une constante : or, pour $u = 0$, $pu - f(u)$ s'annule, puisque les développements (5) et (5 *bis*) ne renferment pas de terme constant; $pu - f(u)$ est donc identiquement nul.

181. Remarque II. — On peut ajouter que pu (et, par suite, ζu et σu, qui se déduisent de pu sans ambiguïté) ne dépend en réalité que du réseau des points-périodes $u = 2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2$;

Fig. 75.



car, d'après la Remarque I, on peut définir complètement pu : une fonction méromorphe, ayant pour pôles doubles les sommets de ce réseau, pour périodes les quantités représentées par les segments rectilignes joignant deux quelconques de ces points, et développable, autour du pôle $u = 0$, sous la forme

$$pu = \frac{1}{u^2} + \text{termes ayant } u \text{ en facteur.}$$

Or le réseau des points $2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2$ peut s'obtenir (*fig.* 75) en partant d'autres périodes que $2\omega_1 = \text{OA}$ et $2\omega_2 = \text{AB}$; par exemple, les parallélogrammes construits avec $2\omega_1 = \text{OA}$ et $2\omega_1 + 2\omega_2 = \text{OB}$ auront pour sommets les points $2m_1\omega_1 + 2m\omega_2$, et ces points seulement. La fonction pu, construite avec les périodes $2\omega_1$ et $2\omega_1 + 2\omega_2$ sera donc la même que celle construite avec $2\omega_1$, $2\omega_2$.

D'une manière générale, les réseaux de parallélogrammes construits avec les deux systèmes de périodes $(2\omega_1, 2\omega_2)$ et $(2\omega'_1, 2\omega'_2)$, et dont un sommet est à l'origine, auront les mêmes sommets : 1° si les sommets du réseau $(2\omega'_1, 2\omega'_2)$ appartiennent

au réseau $(2\omega_1, 2\omega_2)$, c'est-à-dire si l'on a

$$\begin{aligned} 2\omega'_1 &= 2\lambda_1\omega + 2\lambda_2\omega_2 \\ 2\omega'_2 &= 2\mu_1\omega + 2\mu_2\omega_2 \end{aligned} \qquad (\lambda \text{ et } \mu \text{ entiers});$$

2° si les sommets du réseau $(2\omega_1, 2\omega_2)$ appartiennent au réseau $2\omega'_1, 2\omega'_2$, c'est-à-dire si, réciproquement, l'on peut, des équations précédentes, tirer $2\omega_1$, $2\omega_2$ sous forme de fonctions linéaires de $2\omega'_1$, $2\omega'_2$, à coefficients entiers : il faut pour cela que l'on ait [1]

$$\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1 = \pm 1.$$

Les systèmes de périodes $(2\omega_1, 2\omega_2)$ et $(2\omega'_1, 2\omega'_2)$ sont alors dits *équivalents*, et les fonctions pu construites avec deux systèmes de périodes équivalentes sont les mêmes.

On nomme *système de périodes primitives* ou *système primitif*, tout système équivalent au système $2\omega_1$, $2\omega_2$ qui a servi à construire pu. En particulier, le système $2\varepsilon\omega_1$, $2\eta\omega_2$ (ε et η désignant ± 1) est un système primitif.

III. — RELATION ENTRE pu ET $p'u$.

182. Il y a, entre pu et $p'u$, une relation algébrique qu'on formera comme il suit.

---

[1] En effet, on a, en tirant $2\omega_1$ et $2\omega_2$,

$$(\omega) \qquad 2\omega_1 = \frac{2\omega'_1\mu_2 - 2\omega'_2\lambda_2}{\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1}, \qquad 2\omega_2 = \frac{-2\omega'_1\mu_1 + 2\omega'_2\lambda_1}{\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1}.$$

Il faut que les quotients de λ_1, μ_1, λ_2, μ_2 par $\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1$ soient entiers; soient l_1, m_1, l_2, m_2 ces quotients. On a

$$\lambda_1 = l_1(\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1), \qquad \text{etc.},$$

d'où

$$\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1 = (\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1)^2(l_1 m_2 - l_2 m_1),$$

c'est-à-dire

$$(\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1)(l_1 m_2 - l_2 m_1) = 1.$$

Les deux facteurs du produit étant entiers, chacun d'eux doit être ± 1. Réciproquement, si $\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1 = \pm 1$, les équations (ω) donnent bien $2\omega_1$, $2\omega_2$ sous forme de fonctions linéaires de $2\omega'_1$, $2\omega'_2$, à coefficients entiers.

On a, autour du point $u = 0$,

$$pu = \frac{1}{u^2} + c_1 u^2 + c_2 u^4 + \ldots,$$

$$p'u = -\frac{2}{u^3} + 2c_1 u + 4c_2 u^3 + \ldots,$$

ce qui montre que $p'u$ est une fonction elliptique d'ordre 3 : car elle ne peut admettre dans un parallélogramme contenant l'origine d'autre pôle que celui, $u = 0$, de pu, et ce pôle est d'ordre 3 pour $p'u$ (*voir* aussi le n° **132**).

On déduit, des deux développements précédents,

(1) $$p'^2 u - 4p^3 u = -20\frac{c_1}{u^2} - 28c_2 + ku^2 + \ldots.$$

Or la fonction elliptique $p'^2 u - 4p^3 u + 20c_1 pu + 28c_2$ ne peut avoir comme pôles que ceux de pu; mais il est clair, en vertu de la relation précédente, qu'elle n'a plus de pôle à l'origine et s'annule même pour $u = 0$. C'est donc une fonction elliptique, aux périodes $2\omega_1$, $2\omega_2$, et sans pôle dans un parallélogramme des périodes contenant l'origine; elle se réduit dès lors (n° **166**) à une constante, qui est zéro, puisque la fonction, d'après (1), est nulle pour $u = 0$. Donc on a

(2) $$p'^2 u = 4p^3 u - g_2 pu - g_3,$$

g_2 et g_3 désignant respectivement $20c_1$ et $28c_2$. Ce sont des fonctions de $2\omega_1$ et $2\omega_2$, comme tous les coefficients du développement de pu autour du pôle $u = 0$; d'ailleurs les expressions de c_1 et de c_2 en fonction des périodes ont été données au n° **175**, équations (6).

183. On déduit de (2) par dérivation, et après suppression du facteur commun $2p'u$,

(3) $$p''u = 6p^2 u - \frac{1}{2}g_2;$$

puis, par des dérivations successives,

(4) $$\begin{cases} p'''u = 12pu\,p'u, \\ p^{\text{IV}}u = 12p'^2 u + 12pu\left(6p^2 u - \frac{1}{2}g_2\right), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

et ainsi de suite; ce qui montre que les dérivées $p''u$, $p'''u$, ... s'expriment par des polynomes en pu et $p'u$.

La relation

$$p''u = 6p^2u - \frac{1}{2}g_2$$

permet d'exprimer, en fonction de g_2 et g_3, les coefficients c_n du développement du pu autour du pôle $u = 0$. Remplaçons-y en effet

$$pu \text{ par } \frac{1}{u^2} + c_1 u^2 + \ldots + c_n u^{2n} + \ldots$$

$$p''u \text{ par } \frac{6}{u^4} + 2c_1 + \ldots + 2n(2n-1)c_n u^{2n-2} + \ldots,$$

et identifions les coefficients de u^{2n-2} dans les deux membres; nous trouvons

$$2n(2n-1)c_n = 6(2c_n + 2c_1c_{n-2} + 2c_2c_{n-3} + \ldots),$$

ou

$$c_n(2n^2 - n - 6) = 6(c_1c_{n-2} + c_2c_{n-3} + \ldots),$$

formule de récurrence, qui exprime c_n en fonction entière de $c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}$, dès que n dépasse 2. Donc $c_3, c_4, \ldots, c_n, \ldots$ sont des polynomes entiers en c_1 et c_2, c'est-à-dire en g_2 et g_3. On trouve ainsi

$$(5)\quad pu = \frac{1}{u^2} + \frac{1}{20}g_2u^2 + \frac{1}{28}g_3u^4 + \frac{1}{1200}g_2^2u^6 + \frac{3}{6160}g_2g_3u^8 + \ldots.$$

184. Rappelons que nous avons introduit (n° **176**) une période $2\omega_3$, conséquence des deux autres, et définie par

$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0.$$

Posons

$$(6)\qquad p\omega_1 = e_1, \qquad p\omega_2 = e_2, \qquad p\omega_3 = e_3.$$

Ces trois quantités sont distinctes, car la fonction elliptique $pu - pu_0$, où u_0 est une constante, a les pôles de pu; c'est donc une fonction du second ordre, et qui n'a, dès lors, pas d'autres zéros que les deux zéros évidents $u = \pm u_0 +$ Période. On ne pourrait donc avoir $p\omega_1 = p\omega_2$ que si $\omega_1 \pm \omega_2$ était une période, ce qui n'est pas (n° **175**, *Remarque*).

Les points $u = \omega_1, \omega_2, \omega_3$ sont les zéros de $p'u$; on a en effet

$$p'(\omega_\alpha) = p'(\omega_\alpha - 2\omega_\alpha),$$

à cause de la périodicité de $p'u$, c'est-à-dire

$$p'(\omega_\alpha) = p'(-\omega_\alpha) = -p'(\omega_\alpha),$$

car pu étant paire, $p'u$ est impaire.

Donc $2p'(\omega_\alpha) = 0$: d'ailleurs $p'u$, qui est d'ordre 3, n'a pas d'autres zéros que $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, à des périodes près.

Le polynome $4p^3u - g_2 pu - g_3$ $(= p'^2 u)$ s'annule ainsi pour $u = \omega_\alpha$, c'est-à-dire pour $pu = e_1, e_2, e_3$; il peut donc se mettre sous la forme

$$(7) \qquad 4p^3 - g_2 p - g_3 = 4(p - e_1)(p - e_2)(p - e_3),$$

d'où

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0,$$

$$e_1 e_2 + e_1 e_3 + e_2 e_3 = -\frac{1}{4} g_2,$$

$$e_1 e_2 e_3 = \frac{1}{4} g_3.$$

185. Invariants. — On appelle g_2 et g_3 les *invariants* du réseau des points périodes $u = 2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2$. Ces constantes en effet sont déterminées par la relation (2) quand la fonction pu est connue; elles ne dépendent donc, comme pu, que des sommets de ce réseau.

On nomme *invariant principal* ou *absolu* de pu (ou du réseau des points-périodes) la quantité $g_2^3 : g_3^2$. Cette fonction, comme g_2 et g_3, ne dépend que des sommets du réseau : c'est donc une fonction $\varphi(2\omega_1, 2\omega_2)$, qui ne change pas quand on remplace $2\omega_1$ et $2\omega_2$ par un système de périodes équivalent; c'est-à-dire (n° 181) que l'on a

$$(8) \qquad \varphi(2\omega_1, 2\omega_2) = \varphi(2a\omega_1 + 2b\omega_2, 2c\omega_1 + 2d\omega_2),$$

a, b, c, d étant des entiers assujettis à l'unique condition $ad - bc = \pm 1$.

Mais les équations (6) du n° 175, à savoir

$$(9) \qquad \left\{ \begin{aligned} g_2 &= 20c_1 = 60 \sum{}' \frac{1}{(2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2)^4}, \\ g_3 &= 28c_2 = 140 \sum{}' \frac{1}{(2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2)^6}, \end{aligned} \right.$$

montrent que g_2 et g_3 sont fonctions homogènes de ω_1, ω_2,

et de degrés respectifs — 4 et — 6; donc, l'invariant absolu $g_2^3 : g_3^2$ est aussi fonction homogène de ω_1, ω_2, et de degré $-12+12$, ou zéro : c'est, par suite, une fonction du *rapport* $\frac{2\omega_1}{2\omega_2}$ (¹).

Si donc on pose

$$g_2^3 : g_3^2 = \varphi\left(\frac{2\omega_1}{2\omega_2}\right),$$

on aura, par (8),

$$\varphi\left(\frac{2\omega_1}{2\omega_2}\right) = \varphi\left(\frac{2a\omega_1 + 2b\omega_2}{2c\omega_1 + 2d\omega_2}\right).$$

En désignant le rapport $\frac{2\omega_1}{2\omega_2}$ par ρ, on obtient ainsi une fonction, évidemment monodrome (²), $\varphi(\rho)$, qui ne change pas quand on remplace ρ par $\frac{a\rho + b}{c\rho + d}$, a, b, c, d étant des entiers arbitraires, tels que $ad - bc = \pm 1$. C'est ce qu'on nomme une *fonction modulaire,* parce que, dans l'ancienne notation de Legendre, le module k^2 joue le rôle de l'invariant absolu : depuis leur invention par Hermite, ces fonctions ont donné lieu à d'importants travaux, et elles ont été généralisées d'une manière éclatante par M. Poincaré, sous le nom de *fonctions fuchsiennes* ou *automorphes*.

186. Remarque. — Si dans la relation

$$p'^2 u = 4p^3 u - g_2 p u - g_3,$$

on pose

$$pu = z,$$

on a

$$\frac{dz}{du} = \sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3};$$

(¹) Car, si $\varphi(x, y)$ est homogène, de degré zéro, en x, y, on a, par le théorème des fonctions homogènes

$$x\varphi'_x + y\varphi'_y = 0,$$

c'est-à-dire que le jacobien de $\varphi(x, y)$ et de $\frac{y}{x}$ est nul. Donc φ est fonction de $\left(\frac{y}{x}\right)$.

(²) Car, d'après (9), g_2 et g_3 ont une valeur unique et déterminée quand on se donne les périodes $2\omega_1$, $2\omega_2$.

d'où, u_0 et z_0 désignant des constantes convenables,

$$u = u_0 + \int_{z_0}^{z} \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}}.$$

On voit ainsi que $z = pu$ est la fonction inverse d'une intégrale elliptique u de première espèce (n^{os} **158-159**). On reviendra sur ce point au n° **204**.

IV. — EXPRESSIONS DIVERSES D'UNE FONCTION ELLIPTIQUE.

187. Une fonction elliptique quelconque $f(u)$, aux périodes $2\omega_1$, $2\omega_2$, peut être exprimée, soit par les fonctions σ, soit par les fonctions ζ, soit par les fonctions p, construites avec les mêmes périodes.

Expression par un quotient de σ.

188. Formule de Jacobi. — Soient, dans un même parallélogramme des périodes, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ les pôles de $f(u)$; b_1, $b_2, \ldots, b_n$ ses zéros. On sait (n° **170**) que l'on a

$$(10) \qquad a_1 + a_2 + \ldots + a_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n + w,$$

w étant une période. Je dis que

$$(11) \qquad \frac{f(u)}{C} = \frac{\sigma(u-b_1)\,\sigma(u-b_2)\ldots\sigma(u-b_n-w)}{\sigma(u-a_1)\ldots\sigma(u-a_n)},$$

C étant un facteur constant. En effet le second membre, $\varphi(u)$, évidemment méromorphe dans le plan, est une fonction elliptique, aux périodes $2\omega_1$, $2\omega_2$: car si l'on change u en $u + 2\omega_1$, par exemple, il se reproduit, en vertu de la formule (14) du n° **178** ([1]), multiplié par le facteur

$$\frac{(-1)^n\, e^{+2\eta_1(nu+n\omega_1-b_1-b_2-\ldots-b_n-w)}}{(-1)^n\, e^{+2\eta_1(nu+n\omega_1-a_1-a_2-\ldots-a_n)}},$$

qui est égal à l'unité, d'après (10).

([1]) Cette formule est

$$\sigma(u + 2\omega_\alpha) = -\sigma u\, e^{\eta_\alpha(u+\omega_\alpha)}.$$

La fonction elliptique, $\varphi(u)$, a d'ailleurs évidemment les mêmes zéros et les mêmes pôles que $f(u)$; elle n'en diffère donc (n° 171) que par un facteur constant. C. Q. F. D.

Expression par la fonction ζ et ses dérivées.

189. Formule d'Hermite. — Supposons qu'on connaisse, dans un parallélogramme des périodes, les pôles $a, b, c, \ldots, l$, de $f(u)$, et les parties infinies du développement de $f(u)$ autour de chacun d'eux :

$$\text{autour de } a \ldots\ldots\ldots \quad \frac{A_\alpha}{(u-a)^\alpha} + \frac{A_{\alpha-1}}{(u-a)^{\alpha-1}} + \ldots + \frac{A_1}{u-a},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\text{autour de } l \ldots\ldots\ldots \quad \frac{L_\lambda}{(u-l)^\lambda} + \ldots \qquad + \frac{L_1}{u-l}.$$

On aura $A_1 + B_1 + \ldots + L_1 = 0$, car la somme des résidus de $f(u)$, dans un parallélogramme, est nulle (n° 167).

Je dis que

$$(12)\quad \left\{ \begin{aligned} f(u) = {} & A_1\zeta(u-a) - A_2\zeta'(u-a) + \ldots + \frac{(-1)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}A_\alpha\zeta^{\alpha-1}(u-a) \\ & + B_1\zeta(u-b) - \ldots \\ & + L_1\zeta(u-l) - \ldots \qquad \ldots + \frac{(-1)^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!}L_\lambda\zeta^{\lambda-1}(u-l) \\ & + \text{const.}, \end{aligned} \right.$$

$\zeta', \zeta'', \ldots, \zeta^{\alpha-1}, \ldots$ désignant les dérivées successives de ζ.

En effet, le second membre, évidemment méromorphe dans tout le plan, $F(u)$, est une fonction elliptique aux périodes $2\omega_1$, $2\omega_2$: car 1° $\zeta' u$, $\zeta'' u, \ldots$ qui sont $-pu$, $-p'u, \ldots$ sont elliptiques; 2° $\zeta(u-a)$, $\zeta(u-b), \ldots$ se reproduisent augmentés de $2\eta_\alpha$ quand on ajoute $2\omega_\alpha$ à u [1]; de sorte que $F(u)$ se reproduit augmentée de $2\eta_\alpha(A_1 + B_1 + \ldots + L_1)$, c'est-à-dire de zéro. La fonction $F(u)$ est donc bien elliptique aux périodes $2\omega_1$, $2\omega_2$.

---

[1] En vertu de la formule (8) du n° 176

$$\zeta(u + 2\omega_\alpha) = \zeta u + 2\eta_\alpha.$$

Ses pôles, dans un parallélogramme des périodes, sont manifestement a, b, ..., l; aux environs de l'un d'eux, a, on a

$$\zeta(u-a) = \frac{1}{u-a} + \text{une fonction finie pour } u=a,$$

$$\zeta'(u-a) = -\frac{1}{(u-a)^2} + \text{une fonction finie pour } u=a,$$

$$\zeta^{\alpha-1}(u-a) = (-1)^{\alpha-1}\frac{(\alpha-1)!}{(u-a)^\alpha} + \text{une fonction finie pour } u=a,$$

d'où, pour la partie infinie du développement de $F(u)$ autour de a, l'expression

$$\frac{A_\alpha}{(u-a)^\alpha} + \frac{A_{\alpha-1}}{(u-a)^{\alpha-1}} + \ldots + \frac{A_1}{(u-a)}.$$

On voit ainsi que les deux fonctions elliptiques, aux mêmes périodes et aux mêmes pôles, $F(u)$ et $f(u)$, ont mêmes parties infinies aux environs de leurs pôles; leur différence est donc une constante (n° 171). On déterminera la constante en donnant à u une valeur particulière. C. Q. F. D.

190. Intégration. — La formule précédente, due à Hermite, se nomme *formule de décomposition en éléments simples;* elle permet de trouver l'*intégrale* d'une fonction elliptique, car chacun des termes du second membre de (12) s'intègre immédiatement; l'intégrale de ζu est $\log \sigma u$, puisque $\zeta u = \frac{\sigma' u}{\sigma u}$. L'analogie avec la décomposition d'une fraction rationnelle en fractions simples est évidente.

Trois expressions par la fonction $\wp$ et ses dérivées.

191. Première expression. — Ce mode d'expression s'obtient par une combinaison des deux précédents.

Soient, dans un parallélogramme, a_1, a_2, ..., a_n les pôles, b_1, b_2, ..., b_n les zéros d'une fonction elliptique $f(u)$; on a, par la formule de Jacobi (n° 188),

$$f(u) = C\frac{\sigma(u-b_1)\,\sigma(u-b_2)\ldots\sigma(u-b_n-w)}{\sigma(u-a_1)\ldots\sigma(u-a_n)},$$

w étant une période telle que

(13) $$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n + w.$$

Si θ est une constante définie par

$$\theta + a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 0,$$

on a, en vertu de (13),

$$\theta + b_1 + b_2 + \ldots + b_n + w = 0,$$

et l'on peut écrire identiquement :

$$f(u) = C \frac{\left[\dfrac{\sigma(u - b_1)\ldots\sigma(u - b_n - w)\sigma(u - \theta)}{\sigma^{n+1} u}\right]}{\left[\dfrac{\sigma(u - a_1)\ldots\sigma(u - a_n)\sigma(u - \theta)}{\sigma^{n+1} u}\right]}.$$

Le dénominateur de $f(u)$, à savoir $\dfrac{\sigma(u - a_1)\ldots\sigma(u - a_n)\sigma(u - \theta)}{\sigma^{n+1} u}$, est une fonction elliptique aux périodes $2\omega_1$, $2\omega_2$, en vertu de la relation $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \theta = 0$ (n° **188**), et il en est de même du numérateur. Revenant au dénominateur, nous voyons que c'est une fonction qui admet dans un parallélogramme le seul pôle $u = 0$, avec l'ordre $n+1$ de multiplicité : donc, d'après la formule d'Hermite, on peut le mettre sous la forme

$$-\alpha + \alpha_0 \zeta u + \alpha_1 \zeta' u + \ldots + \alpha_n \zeta^{(n)} u;$$

les α_i étant des constantes. D'ailleurs le coefficient de ζu, à savoir α_0, est nul, puisqu'il représente à lui seul la somme des résidus de la fonction par rapport aux pôles, et que cette somme est nulle (n° **167**). Le même raisonnement s'appliquant au numérateur de $f(u)$, il vient ainsi, en remplaçant $\zeta'(u)$ par $-\mathfrak{p} u$, $\zeta'' u$ par $-\mathfrak{p}' u$, etc.,

$$f(u) = C \frac{\beta + \beta_1 \mathfrak{p} u + \beta_2 \mathfrak{p}' u + \ldots + \beta_n \mathfrak{p}^{(n-1)} u}{\alpha + \alpha_1 \mathfrak{p} u + \alpha_2 \mathfrak{p}' u + \ldots + \alpha_n \mathfrak{p}^{(n-1)} u}.$$

C'est là, pour une fonction elliptique d'ordre n, une expression par le quotient de deux fonctions elliptiques, linéaires chacune en $\mathfrak{p} u$, $\mathfrak{p}' u$, $\mathfrak{p}'' u$, ..., $\mathfrak{p}^{(n-1)} u$, d'ordre $n+1$, et ayant un zéro commun, θ.

192. Deuxième expression. — On en déduit une expression à

l'aide de pu et $p'u$ seuls. Car (n° 183) $p''u$, $p'''u$, ... s'expriment par des polynomes en pu et $p'u$; $f(u)$ est donc le quotient de deux polynomes en pu et $p'u$, c'est-à-dire une fonction rationnelle de pu et $p'u$. Ainsi :

Toute fonction elliptique aux périodes $2\omega_1$, $2\omega_2$ s'exprime rationnellement à l'aide des fonctions pu et $p'u$ qui ont les mêmes périodes.

193. **Corollaire I.** — Deux fonctions elliptiques, $f(u)$ et $\varphi(u)$, aux mêmes périodes $(2\omega_1, 2\omega_2)$, sont liées par une relation algébrique. Car, par ce qui précède, on a

$$f(u) = \text{fonct. rat. de } (pu, p'u), \qquad \varphi(u) = \text{fonct. rat. de } (pu, p'u)$$

et

$$p'^2(u) = 4p^3u - g_2 pu - g_3;$$

en éliminant pu et $p'u$ entre ces trois relations, on obtient bien une relation algébrique entre $f(u)$ et $\varphi(u)$.

Il est facile de trouver directement le degré de cette relation, par rapport à f et φ. Soient, en effet, m et n les ordres respectifs des deux fonctions elliptiques $f(u)$ et $\varphi(u)$: à chaque valeur de $f(u)$ correspondent, dans le parallélogramme des périodes communes, m valeurs de u (¹), et, par suite, m valeurs (au plus) de $\varphi(u)$. L'équation entre f et φ est donc de degré m (au plus) par rapport à φ, et de degré n (au plus) par rapport à f.

194. **Corollaire II.** — Il existe une relation algébrique entre une fonction elliptique $f(u)$ et sa dérivée $f'(u)$.

195. **Troisième expression.** — Revenons à la formule

$$f(u) = C\frac{\sigma(u-b_1)\ldots\sigma(u-b_n-\alpha)}{\sigma(u-a_1)\ldots\sigma(u-a_n)}.$$

Soit a une constante définie par

$$(14) \qquad na = a_1 + a_2 + \ldots + a_n;$$

(¹) Car la fonction elliptique $f(u) - c$ a autant de zéros que de pôles, c'est-à-dire m.

on a aussi, en vertu de (13),

(14') $$na = b_1 + b_2 + \ldots + b_n + w,$$

et l'on peut écrire

$$f(u) = C \frac{\left[\frac{\sigma(u-b_1)\ldots\sigma(u-b_n-w)}{\sigma^n(u-a)}\right]}{\left[\frac{\sigma(u-a_1)\ldots\sigma(u-a_n)}{\sigma^n(u-a)}\right]}.$$

Le dénominateur et le numérateur de $f(u)$ sont, d'après le nº **188** et les relations (14), (14'), des fonctions elliptiques; elles n'ont comme pôle que $u = a$, multiple d'ordre n : donc, en vertu de la formule d'Hermite, toutes deux sont de la forme

$$-\alpha + \alpha_0\zeta(u-a) + \alpha_1\zeta'(u-a) + \ldots + \alpha_{n-1}\zeta^{(n-1)}(u-a),$$

le résidu α_0 étant nul (nº **191**); et de là résulte pour $f(u)$ l'expression nouvelle :

$$f(u) = \frac{\beta + \beta_1 p(u-a) + \beta_2 p'(u-a) + \ldots + \beta_{n-1} p^{(n-2)}(u-a)}{\alpha + \alpha_1 p(u-a) + \alpha_2 p'(u-a) + \ldots + \alpha_{n-1} p^{(n-2)}(u-a)}.$$

C'est une formule analogue à celle du nº **191**; seulement ici le numérateur et le dénominateur sont des fonctions elliptiques du même ordre n que $f(u)$: de sorte que les zéros du numérateur sont exactement ceux de $f(u)$, et les zéros du dénominateur exactement les pôles de $f(u)$. La constante a n'est pas quelconque, elle est définie par (14) ou (14') en fonction des pôles ou des zéros de $f(u)$.

V. — FORMULES D'ADDITION.

196. Soit v une constante. Exprimons la fonction elliptique du deuxième ordre de u, $pu - pv$, par un quotient de σ. Les zéros de cette fonction sont $u = \pm v$; ses pôles, le pôle double $u = 0$: la somme de ces zéros est égale à celle de ces pôles, c'est-à-dire que la période désignée par w au nº **188** est nulle.

Donc on a

$$pu - pv = C\frac{\sigma(u-v)\sigma(u+v)}{\sigma^2 u}.$$

Pour déterminer C, égalons les parties infinies des deux membres pour $u = 0$; il vient, puisque $pu = \frac{1}{u^2} + \ldots$, et $\sigma u = u + \ldots$,

$$\frac{1}{u^2} = C\frac{\sigma(-v)\sigma v}{u^2}, \qquad \text{d'où} \qquad C = -\frac{1}{\sigma^2 v}.$$

On a ainsi

$$pu - pv = -\frac{\sigma(u+v)\,\sigma(u-v)}{\sigma^2 u\,\sigma^2 v}, \tag{15}$$

formule importante, dont nous allons déduire celles d'addition de ζ et de p.

197. Formule d'addition pour ζu. — Dérivons logarithmiquement les deux membres de la formule précédente par rapport à u, puis par rapport à v; il vient, puisque la dérivée logarithmique de σu est ζu,

$$\frac{p'u}{pu - pv} = \zeta(u+v) + \zeta(u-v) - 2\zeta u, \tag{16}$$

$$\frac{-p'v}{pu - pv} = \zeta(u+v) - \zeta(u-v) - 2\zeta v, \tag{17}$$

et, par addition,

$$\zeta(u+v) = \zeta u + \zeta v + \frac{1}{2}\,\frac{p'u - p'v}{pu - pv}. \tag{18}$$

C'est la formule d'addition des arguments pour ζu. Par soustraction :

$$\zeta(u-v) = \zeta u - \zeta v + \frac{1}{2}\,\frac{p'u + p'v}{pu - pv}. \tag{19}$$

198. Formule d'addition pour pu. — Dérivons la relation (18) successivement par rapport à u et à v; il vient

$$\left\{\begin{aligned} -p(u+v) &= -pu + \frac{1}{2}\,\frac{p''u}{pu - pv} - \frac{1}{2}\,\frac{p'u(p'u - p'v)}{(pu - pv)^2}, \\ -p(u+v) &= -pv - \frac{1}{2}\,\frac{p''v}{pu - pv} + \frac{1}{2}\,\frac{p'v(p'u - p'v)}{(pu - pv)^2}. \end{aligned}\right. \tag{20}$$

Ajoutons membre à membre, en remplaçant $p''u$ et $p''v$ par

$6p^2 - \frac{1}{2}g_2$ (n° 183), il vient :

$$-2p(u+v) = -pu - pv + \frac{6}{2}\frac{p^2u - p^2v}{pu - pv} - \frac{1}{2}\frac{(p'u - p'v)^2}{(pu - pv)^2},$$

ou, en réduisant,

$$-2p(u+v) = 2(pu+pv) - \frac{1}{2}\left(\frac{p'u - p'v}{pu - pv}\right)^2,$$

et finalement :

$$(21) \qquad p(u+v) + pu + pv = \frac{1}{4}\left(\frac{p'u - p'v}{pu - pv}\right)^2.$$

C'est la formule d'addition des arguments pour p, symétrique en u et v, tandis que les formules (20) ne le sont pas.

Remarque. — Les formules d'addition conduisent à celles de multiplication ; faisant tendre u vers v dans la dernière, on a

$$p(2v) + 2pv = \frac{1}{4}\left(\frac{p''v}{p'v}\right)^2 = \frac{1}{4}\frac{(6p^2v - \frac{1}{2}g_2)^2}{p'^2v},$$

d'où $p(2v)$. En dérivant, on aurait $p'(2v)$; faisant ensuite, dans la formule d'addition, $u = 2v, 3v, \ldots,$ on obtiendra $p(3v)$, $p(4v), \ldots$ [1].

De même, la formule (18), où l'on fait tendre u vers v, donne

$$\zeta(2v) = 2\zeta v + \frac{1}{2}\frac{p''v}{p'v}.$$

190. Cas particuliers du théorème d'addition. — Soit $v = \pm\omega_\alpha$; on a, d'après la formule d'addition de pu,

$$p(u \pm \omega_\alpha) + pu + e_\alpha = \frac{1}{4}\frac{p'^2u}{(pu - e_\alpha)^2} = \frac{(pu - e_\beta)(pu - e_\gamma)}{pu - e_\alpha},$$

d'où

$$p(u \pm \omega_\alpha) = \frac{1}{pu - e_\alpha}[(pu - e_\beta)(pu - e_\gamma) - (p^2u - e_\alpha^2)]$$
$$= e_\alpha + \frac{(e_\alpha - e_\beta)(e_\alpha - e_\gamma)}{pu - e_\alpha},$$

en tenant compte, dans les calculs, de la relation $e_\alpha + e_\beta + e_\gamma = 0$.

---

[1] On trouvera des formules de multiplication plus élégantes dans le *Traité d'Analyse* de M. JORDAN (Tome II, 2e édition, p. 280 et suiv.).

VI. — LES FONCTIONS $\sqrt{pu - e_\alpha}$ ET $\operatorname{sn} u$.

200. Les fonctions $\sigma_{\alpha 0}(u)$. — Dans la formule

$$pu - pv = -\frac{\sigma(u+v)\sigma(u-v)}{\sigma^2 u\, \sigma^2 v}$$

faisons $v = \omega_\alpha$, il vient

$$(22) \qquad pu - e_\alpha = -\frac{\sigma(u+\omega_\alpha)\sigma(u-\omega_\alpha)}{\sigma^2 u\, \sigma^2 \omega_\alpha}.$$

Or, d'après la formule (14) du n° 178, à savoir

$$\sigma(u + 2\omega_\alpha) = -e^{2\eta_\alpha(u+\omega_\alpha)}\sigma v,$$

on a

$$\sigma(u+\omega_\alpha) = \sigma(u - \omega_\alpha + 2\omega_\alpha) = e^{2\eta_\alpha u}\sigma(u-\omega_\alpha).$$

D'où, en remplaçant dans (22) $\sigma(u-\omega_\alpha)$ par $e^{-2\eta_\alpha u}\sigma(u+\omega_\alpha)$,

$$(23) \qquad pu - e_\alpha = e^{-2\eta_\alpha u}\frac{\sigma^2(u+\omega_\alpha)}{\sigma^2 u\, \sigma^2 \omega_\alpha}$$

ou

$$(24) \qquad \sqrt{pu - e_\alpha} = e^{-\eta_\alpha u}\frac{\sigma(u+\omega_\alpha)}{\sigma u\, \sigma \omega_\alpha}.$$

Le radical $\sqrt{pu - e_\alpha}$ est donc, dans tout le plan, une fonction *monodrome* et *méromorphe* de u [1]; la détermination de ce radical que donne le second membre de la formule précédente est celle qui, pour u voisin de zéro, a la valeur principale $\frac{1}{u}$.

On pose

$$(25) \qquad \sigma_\alpha u = e^{-\eta_\alpha u}\frac{\sigma(u+\omega_\alpha)}{\sigma \omega_\alpha} \qquad (\alpha = 1, 2, 3),$$

de sorte qu'on a

$$(26) \qquad \sqrt{pu - e_\alpha} = \frac{\sigma_\alpha u}{\sigma u}.$$

---

[1] De même la fonction $\sqrt{1 - \cos u}$, ou $\sqrt{2}\sin\frac{u}{2}$, est méromorphe.

On n'aura pas, dans ce Cours, à faire usage explicitement des fonctions $\sigma_1 u$, $\sigma_2 u$, $\sigma_3 u$.

On désigne également par $\sigma_{\alpha 0}(u)$ le second membre de la formule (24); voici quelques propriétés des trois fonctions $\sigma_{\alpha 0}$, qui interviennent dans plusieurs questions d'Analyse et de Mécanique.

201. La relation $pu - e_\alpha = \sigma_{\alpha 0}^2(u)$ montre que le carré de la fonction monodrome $\sigma_{\alpha 0}(u)$ est une fonction paire et doublement périodique; donc, si l'on change u en $-u$ ou en $u+$ Période, $\sigma_{\alpha 0}$ se reproduit multiplié par ± 1 : il s'agit de lever l'ambiguïté, ce qu'on fait aisément en donnant à u des valeurs particulières, et en se rappelant que, aux environs de $u = 0$, $\sigma_{\alpha 0}(u) = \frac{1}{u} + \ldots$.

On établit ainsi les formules :

$$(27)\quad \begin{cases} \sigma_{\alpha 0}(-u) = -\sigma_{\alpha 0}(u). & \text{On vérifie le signe en faisant } u = \varepsilon, \\ \sigma_{\alpha 0}(u + 2\omega_\beta) = -\sigma_{\alpha 0}(u). & \quad\text{»}\qquad\text{»}\qquad u = -\omega_\beta, \\ \sigma_{\alpha 0}(u + 2\omega_\alpha) = \sigma_{\alpha 0}(u). & \quad\text{»}\qquad\text{»}\qquad u = -\omega_\alpha + \varepsilon\text{ [1]}. \end{cases}$$

La fonction $\sigma_{\alpha 0}(u)$ est donc doublement périodique; ses périodes sont $2\omega_\alpha$ et $4\omega_\beta$, $4\omega_\gamma$, qui n'en font en réalité que deux, puisque $\omega_\alpha + \omega_\beta + \omega_\gamma = 0$.

Observons enfin que la relation

$$p'^2 u = 4(pu - e_1)(pu - e_2)(pu - e_3)$$

s'écrit, après extraction des racines carrées,

$$p'u = \mp 2\sigma_{10} u\, \sigma_{20} u\, \sigma_{30} u.$$

---

[1] Voici ce dernier calcul. On a

$$\sigma_{\alpha 0}(u + 2\omega_\alpha) = \pm \sigma_{\alpha 0}(u),$$

d'où, pour $u = -\omega_\alpha + \varepsilon$,

$$(\sigma)\qquad \sigma_{\alpha 0}(\omega_\alpha + \varepsilon) = \pm \sigma_{\alpha 0}(-\omega_\alpha + \varepsilon) = \mp \sigma_{\alpha 0}(\omega_\alpha - \varepsilon).$$

En vertu de l'expression (1) de $\sigma_{\alpha 0}(u)$, $\sigma_{\alpha 0}(\omega_\alpha) = 0$, et l'on a, en développant suivant les puissances croissantes de ε,

$$\sigma_{\alpha 0}(\omega_\alpha + \varepsilon) = \varepsilon\sigma'_{\alpha 0}(\omega_\alpha) + \ldots,\qquad \sigma_{\alpha 0}(\omega_\alpha - \varepsilon) = -\varepsilon\sigma'_{\alpha 0}(\omega_\alpha) + \ldots,$$

ce qui montre qu'on doit prendre le signe — dans le dernier membre de (σ), c'est-à-dire le signe + dans $\sigma_{\alpha 0}(u + 2\omega_\alpha) = \pm \sigma_{\alpha 0}(u)$.

Il faut prendre le signe —, car, pour $u = 0$, la valeur principale de $p'u$ est $-\frac{2}{u^3}$, et celle de chacun des σ_{20} est $\frac{1}{u}$.

202. La fonction sn u. — La formule sn u est une des anciennes fonctions elliptiques d'Abel et de Jacobi; on la rattache aux fonctions p et σ par la définition suivante. Posons

$$(28) \qquad \operatorname{sn} u = \sqrt{e_1 - e_2}\,\frac{1}{\sigma_{20}\left(\dfrac{u}{\sqrt{e_1-e_2}}\right)} = \frac{\sqrt{e_1-e_2}}{\sqrt{p\left(\dfrac{u}{\sqrt{e_1-e_2}}\right) - e_2}}.$$

D'après (27) la fonction sn u est impaire; elle est elliptique et admet pour périodes $2\omega_2\sqrt{e_1-e_2}$ et $4\omega_1\sqrt{e_1-e_2}$; elle change de signe si l'on augmente u de $2\omega_1\sqrt{e_1-e_2}$ ou $2\omega_3\sqrt{e_1-e_2}$. Enfin elle est liée à sa dérivée par une importante relation, qu'on va former.

Posons, pour abréger, $v = \frac{u}{\sqrt{e_1-e_2}}$; on a, par (28),

$$(29) \qquad pv - e_2 = \frac{e_1 - e_2}{\operatorname{sn}^2 u};$$

d'où, en dérivant par rapport à u,

$$(30) \qquad \frac{1}{\sqrt{e_1-e_2}}\,p'v = -2(e_1-e_2)\frac{\operatorname{sn}' u}{\operatorname{sn}^3 u}.$$

Portons maintenant les valeurs (29) et (30) de pv et $p'v$ dans l'équation

$$p'^2 v = 4(pv - e_1)(pv - e_2)(pv - e_3);$$

il vient, après réductions,

$$(31) \qquad (\operatorname{sn}' u)^2 = (1 - \operatorname{sn}^2 u)(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u),$$

étant posé

$$k^2 = \frac{e_3 - e_2}{e_1 - e_2}.$$

Observons encore que, par (28), sn $u = 0$ pour $u = 0$.

Remarque. — D'après (31), en posant sn $u = z$, on a

$$\frac{dz}{du} = \sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)},$$

d'où, puisque $u = 0$ pour $z = 0$,

$$u = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}.$$

On voit ainsi que $z = \operatorname{sn} u$ est la fonction inverse de l'intégrale elliptique de première espèce mise sous la forme *de Legendre* (Tome I, n° 251).

D'après cela, les valeurs de $\operatorname{sn} u$ ne dépendent que de u et de k; une Table à double entrée, construite par Legendre, les fait connaître. De même les périodes de $\operatorname{sn} u$, qui ne dépendent que de k, sont données par une Table à simple entrée.

VII. — DÉFINITION DE pu PAR LES INVARIANTS g_2 ET g_3.

---

203. On a formé pu en partant des périodes $2\omega_1$, $2\omega_2$, et l'on a établi la formule

$$(1) \qquad p'^2u = 4p^3u - g_2pu - g_3 = 4(pu - e_1)(pu - e_2)(pu - e_3);$$

g_2 et g_3 étant des fonctions de $2\omega_1$, $2\omega_2$.

Inversement, étant donnés arbitrairement les deux invariants g_2 et g_3, peut-on trouver deux périodes, $2\omega_1$, $2\omega_2$, telles que la fonction pu formée avec ces périodes vérifie la relation (1)? *A priori,* le problème n'est pas impossible, puisque le nombre des équations égale celui des inconnues; on va le résoudre en donnant les valeurs de $2\omega_1$, $2\omega_2$ en fonction de g_2 et g_3.

204. Périodes en fonction des invariants. — Supposons g_2 et g_3 donnés; soit posé

$$Z = 4z^3 - g_2z - g_3 = 4(z-e_1)(z-e_2)(z-e_3).$$

D'après le n° 159, si l'on pose

$$(2) \qquad u = \omega_1 + \int_{e_1}^{z} \frac{dz}{\sqrt{Z}},$$

z est, dans tout le plan, une fonction méromorphe de u, $\varphi(u)$,

doublement périodique, c'est-à-dire elliptique, aux périodes,

$$(3)\qquad 2\omega_1 = 2\int_{e_2}^{e_3} \frac{dz}{\sqrt{Z}}, \qquad 2\omega_2 = 2\int_{e_3}^{e_1} \frac{dz}{\sqrt{Z}}, \qquad 2\omega_3 = 2\int_{e_1}^{e_2} \frac{dz}{\sqrt{Z}}$$

$(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0)$; de plus, on a vu que z est une fonction elliptique paire : elle est d'ordre *deux*, car (n° 159, 2°), à une valeur de $z = \varphi(u)$ correspondent, à des périodes près, *deux* et *deux* valeurs seulement de u. Enfin (n° 159, 3°), on a

$$(4)\qquad \varphi(\omega_\alpha) = e_\alpha.$$

Je dis que cette fonction $\varphi(u)$ est identique à la fonction pu formée avec les périodes $2\omega_1$, $2\omega_2$, définies par (3).

Cherchons les pôles de $\varphi(u)$.

Observons, à cet effet, que $\varphi(u)$ étant paire, $\varphi'(u)$ est impaire, c'est-à-dire que

$$\varphi'(-u) = -\varphi'(u), \qquad \text{d'où, pour } u = 0, \qquad \varphi'(0) = -\varphi'(0),$$

ce qui montre que $\varphi'(0)$ est nul ou infini, c'est-à-dire que $u = 0$ est un zéro ou un pôle de $\varphi'(u)$. Je dis que c'est un pôle.

Car, en différentiant la relation de définition (2), on a

$$\frac{dz}{du} = \sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3},$$

c'est-à-dire, puisque $z = \varphi(u)$,

$$(5)\qquad \varphi'^2(u) = 4\varphi^3(u) - g_2\varphi(u) - g_3 = 4[\varphi(u) - e_1][\varphi(u) - e_2][\varphi(u) - e_3],$$

d'où l'on conclut que $\varphi'(u)$ ne s'annule que pour $\varphi(u) = e_\alpha$, ou, d'après (4), pour

$$\varphi(u) = \varphi(\omega_\alpha).$$

Cette équation en u, puisque $\varphi(u)$ est fonction elliptique paire et d'ordre *deux*, n'a pas d'autres solutions, à des périodes près, que $u = \pm\omega_\alpha$, quantités dont aucune n'est zéro ou une période : dès lors $\varphi'(u)$ ne s'annule pas pour $u = 0$; $u = 0$ est donc un pôle de $\varphi'(u)$.

C'est aussi un pôle de $\varphi(u)$, car la dérivée d'une fonction méromorphe n'a pas d'autres pôles que ceux de la fonction (n° 132); comme $\varphi(u)$ est paire, le pôle $u = 0$ est un pôle d'ordre pair, et c'est un pôle *double*, puisque $\varphi(u)$ est une fonction elliptique

d'ordre *deux*. Pour la même raison, il n'y a pas d'autre pôle dans un parallélogramme contenant ce pôle.

Ainsi les pôles de $\varphi(u)$ sont uniquement les pôles *doubles* $u = 2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2$.

Cela posé, autour du pôle double $u = 0$, le développement de $\varphi(u)$, fonction paire, est de la forme

$$\varphi(u) = \frac{\lambda}{u^2} + \mu + \nu u^2 + \ldots, \qquad (\lambda \gtrless 0),$$

d'où

$$\varphi'(u) = -\frac{2\lambda}{u^3} + 2\nu u + \ldots.$$

Portons ces valeurs dans la relation (5), entre $\varphi(u)$ et $\varphi'(u)$, à savoir $\varphi'^2 = 4\varphi^3 - g_2\varphi - g_3$, il vient

$$\frac{4\lambda^2}{u^6} - \frac{8\lambda\nu}{u^2} + \ldots = \frac{4\lambda^3}{u^6} + 12\frac{\lambda^2\mu}{u^4} + \ldots - g_2\frac{\lambda}{u^2} - \ldots - g_3;$$

d'où, en égalant les coefficients des termes en $\frac{1}{u^6}$ et $\frac{1}{u^4}$ dans les deux membres,

$$\lambda = 1, \qquad \mu = 0.$$

Le développement de $\varphi(u)$ autour du pôle $u = 0$, est ainsi

$$\varphi(u) = \frac{1}{u^2} + \nu u^2 + \ldots.$$

Donc enfin, si l'on considère la fonction pu formée avec les périodes $2\omega_1$, $2\omega_2$ de $\varphi(u)$, la différence $\varphi(u) - pu$ est une fonction elliptique aux mêmes périodes, sans pôle dans un parallélogramme contenant l'origine et s'annulant pour $u = 0$: c'est donc une constante nulle, et l'on a bien $\varphi(u) = pu$.

Ainsi :

Les invariants g_2 et g_3 étant donnés, les périodes $2\omega_1$, $2\omega_2$ ont les valeurs (3), c'est-à-dire que la fonction pu formée avec ces périodes vérifie l'équation (5) : $p'^2 u = 4p^3 u - g_2 pu - g_3$.

D'après cela, on voit qu'il faut entendre, par $p(u, g_2, g_3)$, $p(u, e_\alpha)$; et, de même, par $\zeta(u, g_2, g_3)$, $\sigma(u, g_2, g_3)$ [1].

---

[1] On a, d'après (2),

$$u = \omega_1 + \int_{e_1}^{pu} \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}}, \qquad (\textit{voir } n^o\ 186),$$

ce qui peut aussi servir de définition à pu.

205. Remarques sur les périodes. — Je dis que si g_2 et g_3 sont réels, la fonction $p(u, g_2, g_3)$ admet une période réelle et une période purement imaginaire.

Supposons d'abord e_1, e_2, e_3 réels et $e_1 > e_3 > e_2$. La période

$$(6) \qquad 2\omega_1 = 2\int_{e_2}^{e_3} \frac{dz}{\sqrt{4(z-e_1)(z-e_2)(z-e_3)}}$$

est réelle, puisque les limites de l'intégrale sont réelles et que, entre $z = e_2$ et $z = e_3$, le polynome sous le radical reste positif.

De même la période

$$(7) \qquad 2\omega_2 = \int_{e_3}^{e_1} \frac{dz}{\sqrt{4(z-e_1)(z-e_2)(z-e_3)}}$$

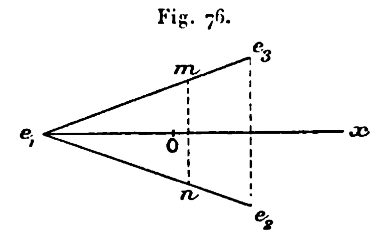
est purement imaginaire, puisque les limites sont réelles, et que, entre e_3 et e_1, le polynome sous le radical reste négatif.

Ainsi, e_1, e_2, e_3 étant réels, il y a une période réelle, $2\omega_1$, et une période purement imaginaire, $2\omega_2$, *formant un système primitif*, c'est-à dire telles que la fonction $p(u, 2\omega_1, 2\omega_2)$, construite avec ces périodes, vérifie la relation $p'^2 = 4p^3 - g_2 p - g_3$.

Supposons maintenant e_1 seul réel, et e_2, e_3, imaginaires conjugués : il y a encore une période réelle et une période purement imaginaire, *mais elles ne forment pas un système primitif.*

En effet, si l'on figure, dans le plan de la variable z, les trois

Fig. 76.



points e_1, e_2, e_3, on a

$$2\omega_3 = 2\int_{e_1}^{e_2} \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}},$$

l'intégrale étant prise le long de la ligne droite $e_1 e_2$; de même

$$-2\omega_2 = 2\int_{e_1}^{e_3} \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}},$$

l'intégrale étant prise le long de $e_1 e_3$.

Or, en deux points m et n, situés l'un sur $e_1 e_3$, l'autre sur $e_2 e_3$, et ayant même abscisse, les valeurs de z, celles de dz, et celles de $\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}$ sont respectivement imaginaires conjuguées; il en résulte que $2\omega_3$ et $-2\omega_2$ sont imaginaires conjuguées, c'est-à-dire que

$$2\omega_3 = A + Bi,$$
$$-2\omega_2 = A - Bi.$$

Par suite, la période $2\omega_3 - 2\omega_2 = 2A$ est réelle, et la période $2\omega_3 + 2\omega_2 = 2Bi$ est purement imaginaire; mais elles ne forment pas un système primitif, car les périodes $2A$ et $2Bi$ n'entraînent pas les périodes (primitives) $A + Bi$ et $A - Bi$.

206. Autre forme des formules d'homogénéité. — En vertu des formules (9) du n° 185,

$$g_2 = 60 \sum' \frac{1}{(2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2)^4}, \qquad g_3 = 140 \sum' \frac{1}{(2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2)^6},$$

changer ω_1 et ω_2 en $\mu\omega_1$ et $\mu\omega_2$ revient à changer g_2 et g_3 en $\frac{1}{\mu^4} g_2$ et $\frac{1}{\mu^6} g_3$, de sorte que, si l'on pose

$$p(u, 2\omega_1, 2\omega_2) = p(u, g_2, g_3),$$

on aura

$$p(\mu u, 2\mu\omega_1, 2\mu\omega_2) = p\left(\mu u, \frac{1}{\mu^4} g_2, \frac{1}{\mu^6} g_3\right).$$

Dès lors, la première formule d'homogénéité du n° 179, à savoir

$$p(\mu u, 2\mu\omega_1, 2\mu\omega_2) = \frac{1}{\mu^2} p(u, 2\omega_1, 2\omega_2),$$

s'écrit, en posant $\mu = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$,

$$(8) \qquad p\left(\frac{u}{\sqrt{\lambda}}, \lambda^2 g_2, \lambda^3 g_3\right) = \lambda\, p(u, g_2, g_3).$$

De même, les deux autres formules d'homogénéité donnent

$$(9) \qquad \zeta\left(\frac{u}{\sqrt{\lambda}}, \lambda^2 g_2, \lambda^3 g_3\right) = \sqrt{\lambda}\, \zeta(u, g_2, g_3),$$

$$(10) \qquad \sigma\left(\frac{u}{\sqrt{\lambda}}, \lambda^2 g_2, \lambda^3 g_3\right) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sigma(u, g_2, g_3).$$

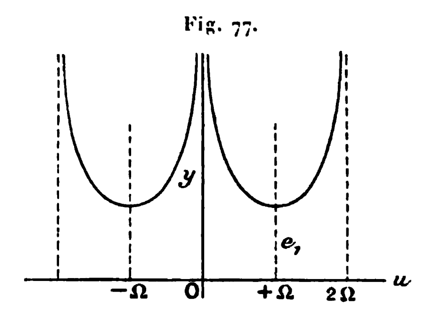
207. Étude de pu pour u, g_2 et g_3 réels. — 1° Supposons d'abord e_1, e_2, e_3 réels, avec $e_1 > e_3 > e_2$, et soit Ω la demi-période *réelle et positive* de pu; on a (n° 205)

$$\Omega = \omega_1 = \int_{e_1}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}}.$$

Construisons la courbe $y = pu$ pour les valeurs réelles de u; il suffit de faire varier u de $-\Omega$ à $+\Omega$, intervalle d'une période, et même de o à Ω, à cause de la parité de la fonction.

Pour $u = \varepsilon$, $pu = \frac{1}{u^2} + \ldots$ part de $+\infty$; pu commence par décroître. Le minimum a lieu pour $u = \Omega$, puisque les demi-pé-

Fig. 77.



riodes $\Omega + 2k\Omega$ sont les seuls zéros réels de $p'u$. Ce minimum est $p\Omega = p\omega_1 = e_1$, quantité positive lorsque e_1, e_2, e_3 sont réels, à cause des relations $e_1 + e_2 + e_3 = 0$ et $e_1 > e_3 > e_2$. La courbe a la forme ci-dessus. Elle se compose d'une infinité de branches identiques.

La forme de la courbe donne le signe à prendre pour $p'u$ dans la formule

$$p'u = \pm\sqrt{4p^3 - g_2 p - g_3};$$

on voit par exemple que, pour u compris entre o et Ω, on doit prendre le signe $-$, ce qui donne

$$-dpu = \sqrt{4p^3 - g_2 p - g_3}\, du.$$

2° Si e_1 est réel et e_2, e_3 imaginaires conjugués, pu a encore une période réelle et positive, 2Ω (n° 205), égale à $\pm(2\omega_3 - 2\omega_2)$; $p'\Omega$ est nul, et l'on a $p\Omega = p(\omega_3 + \omega_2 - 2\omega_2) = p\omega_1 = e_1$. La forme

de la courbe est donc la même que ci-dessus, Ω désignant toujours la demi-période *réelle et positive*.

208. Remarque. — La forme de la courbe montre que, u croissant de o à Ω, pu décroît, par valeurs réelles, de $+\infty$ à e_1 : la relation

$$\frac{-dpu}{\sqrt{4p^3u - g_2pu - g_3}} = du$$

donne alors, par intégration entre les limites correspondantes o et Ω pour u, ∞ et e_1 pour pu, la formule

$$(11) \qquad \Omega = \int_{e_1}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2x - g_3}},$$

expression générale de la demi-période réelle et positive, lorsque g_2 et g_3 sont réels.

CHAPITRE IV.

APPLICATIONS DES FONCTIONS ELLIPTIQUES.

I. — CALCUL DES INTÉGRALES ELLIPTIQUES.

209. L'importance des fonctions elliptiques dans les applications provient surtout de leur usage pour le calcul des *intégrales elliptiques* qui dépendent de la racine carrée d'un polynome du troisième ou du quatrième ordre. La forme de ces intégrales est (Tome I, nos **241**, **245** et suivants)

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)\sqrt{X}}\,dx,$$

P et Q étant des polynomes en x, et X un polynome du quatrième ou du troisième degré.

Si X est d'ordre quatre, *on le ramènera à l'ordre trois* par un des procédés indiqués au Tome I (nos **247-250**), et cela sans introduire d'imaginaires, si les coefficients de X sont réels.

210. Intégration. — L'intégration des différentielles elliptiques se réduit ainsi à celle de l'expression

$$(1) \qquad \int \frac{P(x)}{Q(x)} \frac{dx}{\sqrt{X}},$$

où le polynome X est du troisième ordre : soit posé

$$X = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

On fera disparaître le terme en x^2 par le changement de variable

$$x = \lambda y - \frac{b}{3a},$$

λ étant une constante que l'on prendra généralement égale à ± 1, mais qu'il est parfois utile de laisser indéterminée pour simplifier,

plus tard, les formules. Le polynome X devient ainsi

$$a\lambda^3 y^3 + my + n = \frac{a\lambda^3}{4}(4y^3 - g_2 y - g_3),$$

g_2 et g_3 étant des constantes; on a alors pour l'intégrale proposée, en ayant soin de choisir le signe de λ de manière que $a\lambda^3$ soit positif, une expression de la forme

$$(2) \qquad \int \frac{R(y)}{S(y)} \frac{dy}{\sqrt{4y^3 - g_2 y - g_3}},$$

$R(y)$ et $S(y)$ étant des polynomes en y.

En appliquant la méthode de réduction indiquée au Tome I, n°s 241-243, on ramène cette intégrale à une partie tout intégrée, et au calcul des trois intégrales de *première, seconde* et *troisième espèce* (Tome I, n° 245), à savoir

$$\int \frac{dy}{\sqrt{4y^3 - g_2 y - g_3}}, \qquad \int \frac{y\,dy}{\sqrt{4y^3 - g_2 y - g_3}},$$
$$\int \frac{dy}{(y-a)\sqrt{4y^3 - g_2 y - g_3}}.$$

On effectue l'intégration en faisant, dans les trois intégrales, le changement de variable

$$y = p(u, g_2, g_3),$$

d'où

$$dy = p'u\,du = \pm\sqrt{4p^3 u - g_2 p u - g_3}\,du;$$

le radical, qui se trouve alors en facteur au numérateur et au dénominateur, disparaît, et les trois intégrales deviennent

$$\int \frac{dy}{\sqrt{4y^3 - g_2 y - g_3}} = \int du = u + \text{const.},$$
$$\int \frac{y\,dy}{\sqrt{4y^3 - g_2 y - g_3}} = \int p u\,du = -\zeta u + \text{const.},$$
$$\int \frac{dy}{(y-a)\sqrt{4y^3 - g_2 y - g_3}} = \int \frac{du}{pu - a}.$$

Pour calculer cette dernière, posons $a = pc$, c étant, comme a, une constante; nous avons, d'après la formule (17) du n° 197,

$$\frac{1}{pu - pc} = -\frac{1}{p'c}[\zeta(u+c) - \zeta(u-c) - 2\zeta c],$$

d'où, en intégrant,

$$\int \frac{du}{pu - pc} = -\frac{1}{p'c}[\log\sigma(u+c) - \log\sigma(u-c) - 2u\zeta c] + \text{const.}$$

Le problème de l'intégration des différentielles elliptiques est donc complètement résolu.

211. Remarque I. — Il arrive souvent que les racines du polynome X sont en évidence :

$$X = A(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma).$$

On fera alors, conformément à la méthode ci-dessus,

$$x = \lambda y + \frac{1}{3}(\alpha + \beta + \gamma),$$

d'où

$$X = A\lambda^3(y - e_\alpha)(y - e_\beta)(y - e_\gamma),$$

étant posé

$$e_\alpha = \frac{1}{\lambda}\left(\alpha - \frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right),$$

$$e_\beta = \frac{1}{\lambda}\left(\beta - \frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right),$$

$$e_\gamma = \frac{1}{\lambda}\left(\gamma - \frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right),$$

et l'on effectuera l'intégration en posant ensuite

$$y = p(u, e_\alpha, e_\beta, e_\gamma).$$

C'est la méthode générale; seulement on introduit les racines e_α au lieu des invariants g_2 et g_3.

Remarque II. — Pour calculer l'intégrale générale (2),

$$\int \frac{R(y)}{S(y)} \frac{dy}{\sqrt{4y^3 - g_2 y - g_3}},$$

il n'est pas nécessaire de la décomposer en intégrales de première, seconde et troisième espèces, par la méthode du Cours de première année. En y posant directement $y = p(u, g_2, g_3)$, on est ramené au calcul de $\int \frac{R(pu)}{S(pu)} du$, c'est-à-dire à l'intégration d'une fonction elliptique : on applique alors la méthode d'Hermite, par la décomposition en éléments simples.

212. Autre méthode. — On peut intégrer les différentielles elliptiques d'une autre manière, sans avoir besoin de ramener à l'ordre trois le polynome du quatrième ordre X.

Cherchons d'abord la formule qui donne l'expression, en éléments simples, de la fonction elliptique $\chi(u)$ définie par

$$\chi(u) = (pu - pa)[p(u+a) - pa],$$

a désignant une constante. Chacun des deux facteurs de $\chi(u)$ a un pôle double ($u = 0$ pour le premier, $u = -a$ pour l'autre) qui est zéro simple de l'autre facteur : $\chi(u)$ n'a donc que deux pôles, simples, $u = 0$ et $u = -a$. Autour du pôle $u = 0$, on a

$$\chi(u) = \left(\frac{1}{u^2} - pa + c_1 u^2 + \ldots\right)(pa + up'a + \ldots - pa) = \frac{1}{u}p'a + \ldots.$$

Le résidu est donc $p'a$; pour le pôle $u = -a$, le résidu est $-p'a$, car (n° 167) la somme des deux résidus est nulle. La formule d'Hermite (n° 189) donne alors

$$\chi(u) = p'a[\zeta u - \zeta(u+a) + C].$$

On détermine la constante C en écrivant que $\chi(a)$ est nul, d'où

$$C = \zeta(2a) - \zeta a = \zeta a + \frac{1}{2}\frac{p''a}{p'a},$$

d'après l'expression de $\zeta(2u)$, du n° 198, Remarque. Donc

$$\chi(u) = p'a[\zeta u + \zeta a - \zeta(u+a)] + \frac{1}{2}p''a,$$

ou encore, d'après la formule d'addition de ζ (n° 197),

$$(3) \qquad \chi(u) = -\frac{1}{2}p'a\,\frac{p'u - p'a}{pu - pa} + \frac{1}{2}p''a.$$

Cela posé, cherchons la relation algébrique (n° 193) qui existe entre les deux fonctions elliptiques de u, $\psi(u)$ et $\varphi(u)$, définies par

$$\psi(u) = \frac{1}{\lambda}[pu - p(u+a)], \qquad \varphi(u) = \frac{1}{2}\frac{p'u - p'a}{pu - pa},$$

λ et a étant des constantes. On peut écrire, d'après la formule d'addition de p,

$$\varphi^2(u) = pu + pa + p(u+a); \quad \varphi^2 - 3pa = (pu - pa) + [p(u+a) - pa].$$

D'ailleurs

$$\lambda\psi(u) = (pu - pa) - [p(u+a) - pa],$$

et par suite

$$\lambda^2\psi^2 = (\varphi^2 - 3pa)^2 - 4(pu - pa)[p(u+a) - pa] = (\varphi^2 - 3pa)^2 - 4\chi(u);$$

finalement, en remplaçant χu par sa valeur (3) ci-dessus, à savoir

$$-p'a\,\varphi(u) + \frac{1}{2}p''a,$$

nous obtenons la relation cherchée entre φ et ψ :

$$(4) \qquad \psi^2 = \frac{1}{\lambda^2}[\varphi^4 - 6pa\,\varphi^2 + 4p'a\,\varphi + g_2 - 3p^2a],$$

après substitution à $2p^{\text{IV}}a$ de sa valeur, $12p^2a - g_2$ (n° 183).

213. Soit maintenant un polynome du quatrième degré, $X(x)$, privé du terme en x^3,

$$X = \alpha_0(x^4 + 6m_2x^2 + 4m_3x + m_4),$$

je dis qu'*on pourra exprimer x et $\sqrt{X}$ en fonction elliptique d'un paramètre u* : il suffira d'identifier la relation

$$(\sqrt{X})^2 = \alpha_0(x^4 + 6m_2x^2 + 4m_3x + m_4),$$

avec la relation (4), ce qui se fait en posant

$$x = \varphi(u), \qquad \pm\sqrt{X} = \psi(u), \qquad \lambda = \frac{1}{\sqrt{\alpha_0}},$$

$$pa = -m_2, \qquad p'a = m_3, \qquad g_2 - 3p^2a = m_4.$$

On en déduit

$$g_2 = m_4 + 3m_2^2,$$

et, pour obtenir g_3, il suffit d'exprimer que pa et $p'a$ vérifient la relation classique entre pu et $p'u$, ce qui donne

$$g_3 = -m_2^3 - m_3^2 + m_2m_4.$$

Donc enfin :

Étant posé $\sqrt{X} = \sqrt{\alpha_0(x^4 + 6m_2x^2 + 4m_3x + m_4)}$, on exprimera x et $\sqrt{X}$ en fonction elliptique d'un paramètre u par les

formules

$$x = \frac{1}{2}\frac{p'u - p'a}{pu - pa}, \qquad \pm\sqrt{X} = \sqrt{\alpha_0}[pu - p(u+a)],$$

les fonctions elliptiques introduites ayant pour invariants

$$g_2 = m_4 + 3m_2^2, \qquad g_3 = m_2 m_4 - m_2^3 - m_3^2,$$

et a désignant une constante, définie par les relations compatibles $pa = -m_2$; $p'a = m_3$. Il n'est pas nécessaire de connaître a, qui, dans les expressions de x et de X, n'intervient évidemment que par pa et $p'a$.

Cela fait, pour calculer l'intégrale elliptique $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\frac{dx}{\sqrt{X}}$, on n'aura qu'à y remplacer x et $\sqrt{X}$ par leurs valeurs ci-dessus en u. Quant à dx, comme on a

$$\zeta(u+a) = \zeta u + \zeta a + \frac{1}{2}\frac{p'u - p'a}{pu - pa} = \zeta u + \zeta a + x,$$

on en déduit, en dérivant par rapport à u,

$$\frac{dx}{du} = pu - p(u+a) = \pm\frac{\sqrt{X}}{\sqrt{\alpha_0}}, \qquad \frac{dx}{\sqrt{X}} = \pm\frac{du}{\sqrt{\alpha_0}};$$

de sorte que l'intégrale proposée devient

$$\pm\frac{1}{\sqrt{\alpha_0}}\int R\left(\frac{1}{2}\frac{p'u - p'a}{pu - pa}\right)du,$$

R désignant la fraction P : Q, et l'on est ramené à intégrer une fonction elliptique, ce qu'on fera par la méthode d'Hermite.

II. — COURBES DE GENRE UN; CUBIQUES PLANES.

214. D'après le Tome I, p. 259, les coordonnées d'un point d'une courbe de genre *un* peuvent s'exprimer rationnellement en fonction d'un paramètre x et d'un radical $\sqrt{X}$, portant sur un polynome du quatrième degré en t.

Si, dans ces expressions, on remplace x et $\sqrt{X}$ par leurs valeurs en fonction elliptique du paramètre u (n° **213**), on voit que :

Les coordonnées d'un point d'une courbe de genre un *peuvent s'exprimer en fonction elliptique d'un paramètre.*

Les intégrales abéliennes appartenant à une courbe de genre *un* sont réductibles (Tome I, p. 259) à des intégrales elliptiques; on sait donc les exprimer par les fonctions p, ζ et σ.

Nous n'insisterons pas davantage sur les courbes de genre *un* en général; mais nous étudierons avec détails le cas particulier des courbes du troisième ordre.

215. Cubique plane. — Dans le cas de la cubique plane, on peut, pour trouver l'expression elliptique des coordonnées d'un point, procéder comme il suit.

Une cubique plane admet, comme on sait, des points d'inflexion (9 en général) : prenons un de ces points pour origine et la tangente en ce point pour axe des x; l'équation de la courbe sera de la forme

$$(1) \qquad Ax^3 + Bx^2y + Cy^2x + Dy^3 + 2y(\alpha x + \beta y) + y = 0,$$

car y doit être en facteur dans les termes du second degré.

En posant

$$(2) \qquad \frac{1}{y} = \eta, \qquad \frac{x}{y} = \xi,$$

la relation précédente s'écrit

$$(\eta + \alpha\xi + \beta)^2 = -A\xi^3 + (\alpha^2 - B)\xi^2 + (2\alpha\beta - C)\xi + \beta^2 - D.$$

Posons encore

$$(3) \qquad \xi = mX + n,$$

m étant pris de telle sorte que le coefficient de X^3 dans le second membre soit 4, et n de telle sorte que le coefficient de X^2 dans ce second membre soit nul; on aura

$$(4) \qquad [\eta + \alpha(mX + n) + \beta]^2 = 4X^3 - g_2X - g_3,$$

g_2 et g_3 désignant des constantes.

On peut alors poser

$$X = p(u, g_2, g_3),$$

ce qui donne, par (4),

$$\eta + \alpha(mX + n) + \beta = p'u,$$

d'où

$$\eta = p'u + \lambda pu + \mu,$$

λ et μ étant des constantes. Remontant, de X et η, à ξ, x et y, on a

$$y = \frac{1}{\eta} = \frac{1}{p'u + \lambda pu + \mu}, \qquad x = y\xi = y(mX + n) = \frac{mpu + n}{p'u + \lambda pu + \mu}.$$

On a ainsi exprimé x et y en fonction elliptique du paramètre u; ces formules sont comprises, comme cas particuliers, dans les suivantes, où les deux dénominateurs sont les mêmes :

$$(5) \qquad x = \frac{\alpha p'u + \beta pu + \gamma}{ap'u + bpu + c}, \qquad y = \frac{\alpha' p'u + \beta' pu + \gamma'}{ap'u + bpu + c},$$

les α, α', a, ... désignant des constantes.

Observons qu'à une valeur u du paramètre et aux valeurs u+ Période, correspond, par les formules (5), le même point x, y.

Inversement, je dis que la courbe représentée par les deux équations (5), u étant un paramètre variable, est une cubique. En effet, une droite quelconque, $Ax + By + C = 0$, la coupe en des points dont les arguments u vérifient l'équation

$$A(\alpha p'u + \beta pu + \gamma) + B(\alpha' p'u + \ldots) + C(ap'u + \ldots) = 0;$$

le premier membre de cette équation est une fonction elliptique d'ordre 3, car elle n'admet, à des périodes près, que le pôle triple $u = 0$; elle a donc trois zéros : la courbe étant ainsi coupée en trois points par une droite quelconque, et étant d'ailleurs algébrique (n° 193), est d'ordre *trois*. C. Q. F. D.

216. Propriétés géométriques. — D'après cela, les arguments u_1, u_2, u_3 des trois points où une droite quelconque rencontre la cubique (5) sont les zéros d'une fonction elliptique d'ordre *trois*, admettant le pôle triple $u = 0$; donc on a, pour trois points en ligne droite (n° 170),

$$u_1 + u_2 + u_3 = \text{Période}.$$

Inversement, si les arguments u_1, u_2, u_3, de trois points de la cubique, vérifient la relation $u_1+u_2+u_3=$ Période, ces points sont en ligne droite : car la droite menée par u_1 et u_2 coupe la cubique en un nouveau point u' tel que u_1+u_2+u' soit une période; on aura donc $u_3=u'+$ Période, c'est-à-dire que le point u' coïncidera géométriquement avec u_3.

De même, pour que six points u_1, u_2, ..., u_6 soient sur une conique, il faut et il suffit que

$$u_1+u_2+\ldots+u_6=\text{Période}.$$

De là se réduisent de nombreuses propriétés géométriques.

Par exemple : *Si trois couples de points d'une cubique sont sur une conique, les trois droites correspondantes coupent la cubique en trois nouveaux points qui sont en ligne droite.*

Car si u_1, u'_1; u_2, u'_2; u_3, u'_3 sont les points des trois couples, les trois nouveaux points sont $-(u_1+u'_1)$, $-(u_2+u'_2)$, $-(u_3+u'_3)$ et l'on a bien

$$-(u_1+u'_1+u_2+u'_2+u_3+u'_3)=\text{Période},$$

puisque les six points primitifs sont sur une conique.

217. Corollaires. — On peut supposer que la conique se réduit à deux droites, d'où un corollaire facile à énoncer; si les deux droites sont confondues, on a cette proposition :

Trois tangentes à une cubique, dont les points de contact sont en ligne droite, coupent la courbe en trois nouveaux points qui sont aussi en ligne droite.

218. Points d'inflexion. — En un point d'inflexion u passe une droite (la tangente) qui coupe la courbe en trois points confondus avec u; donc

$$3u=\text{Période},$$

d'où

$$u=\frac{2m_1\omega_1+2m_2\omega_2}{3},$$

$2\omega_1$, $2\omega_2$ désignant les périodes des fonctions elliptiques introduites, et m_1, m_2 des entiers quelconques.

Il y a donc neuf points d'inflexion, obtenus en donnant à m_1, m_2

les valeurs o, 1, 2 : car aux valeurs m_1, m_2 et $m_1 + 3h$, $m_2 + 3k$ correspond le même point. Soient (m_1, m_2) et (m'_1, m'_2) deux de ces points; la droite qui les joint coupe la cubique en un nouveau point qui est aussi d'inflexion, car son argument est

$$\frac{-2(m_1 + m'_1)\omega_1 - 2(m_2 + m'_2)\omega_2}{3}.$$

Les points d'inflexion sont ainsi, trois à trois, sur des droites, dont il passe évidemment 4 par chacun d'eux. On a ainsi, en tout, $9 \times 4 = 36$ droites, dont chacune est comptée trois fois : le nombre des droites est donc $\frac{36}{3} = 12$.

219. Tangentes issues d'un point. — Les arguments v des points de contact des tangentes menées à la cubique par un de ses points u vérifient l'équation

$$2v + u = \text{Période},$$

ou

$$v = -\frac{u}{2} + \frac{1}{2}\,\text{Période}.$$

Il y a quatre demi-périodes distinctes aux périodes près, savoir 0, ω_1, ω_2, ω_3; donc quatre tangentes.

La droite qui joint deux quelconques des points de contact et celle qui joint les deux autres se rencontrent sur la cubique; car droite qui joint les points $-\frac{u}{2}$ et $-\frac{u}{2} + \omega_1$, coupe encore la cubique au point $u - \omega_1$, et la droite qui joint $-\frac{u}{2} + \omega_2$ et $-\frac{u}{2} + \omega_3$ la coupe au point $u - \omega_2 - \omega_3$, c'est-à-dire $u + \omega_1$: ce point est le même que le précédent puisque la différence $u + \omega_1 - (u - \omega_1)$ est une période, $2\omega_1$.

On détermine ainsi trois nouveaux points de la cubique $u + \omega_1$, $u + \omega_2$, $u + \omega_3$; les tangentes en ces points et la tangente au point primitif u se coupent en un même point, situé sur la courbe, d'argument $-2u$, etc.

220. Différentielles abéliennes. — Pour une cubique $f(x, y) = 0$, x et y étant des fonctions elliptiques d'un paramètre u, toute différentielle abélienne, $F(x, y)\,dx$, où F est rationnel en x et y,

prend la forme $\varphi(u)\,du$, $\varphi(u)$ étant elliptique. On peut donc l'intégrer par la méthode d'Hermite.

Exemple 1°. — Les intégrales

$$\int \frac{dx}{(x^3+ax^2+bx+c)^{\frac{1}{3}}}, \qquad \int \frac{dx}{(x^3+ax^2+bx+c)^{\frac{2}{3}}}$$

se ramènent aux intégrales elliptiques : car en posant

$$(6) \qquad y^3 = x^3 + ax^2 + bx + c,$$

elles s'écrivent $\int \frac{dx}{y}$, $\int \frac{dx}{y^2}$; elles sont donc abéliennes relativement à la cubique (6). Pour les calculer, il faut exprimer les coordonnées x et y d'un point de (6) en fonction elliptique d'un paramètre; or, en décomposant le second membre en facteurs, l'équation (6) s'écrit

$$(7) \qquad y^3 = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma),$$

et un point *d'inflexion* de cette courbe est en évidence, le point $y=0$, $x=\alpha$, où la tangente est la droite $x-\alpha=0$. La méthode du n° 215 s'applique alors sans difficulté.

Exemple 2°. — L'aire comprise entre un arc de cubique, les deux ordonnées extrêmes et l'axe des x a pour expression

$$\int y\,dx;$$

on saura donc la calculer par les fonctions elliptiques. Il en est de même de l'aire comprise entre un arc de cubique et les deux rayons qui vont de l'origine des coordonnées aux extrémités de cet arc : elle a en effet pour expression

$$\frac{1}{2}\int (x\,dy - y\,dx) = \frac{1}{2}xy - \int y\,dx,$$

car l'aire du triangle qui a pour sommets l'origine et les points (x, y) $(x+dx,\ y+dy)$ est $\frac{1}{2}(x\,dy - y\,dx)$, en valeur absolue.

A titre d'application, considérons une cubique dont les asymptotes sont concourantes à l'origine, et inflexionnelles : prenons

pour axe des y une de ces asymptotes; la cubique a pour équation

$$x(y^2 + 2axy + bx^2) = 4c \quad \text{ou} \quad (y + ax)^2 + kx^2 = \frac{4c}{x}.$$

Faisons $x = \frac{1}{\xi}$; il vient

$$(y\xi + a)^2 = 4c\xi^3 - k = c(4\xi^3 - g_3),$$

g_3 étant égal à $k : c$. Si donc on pose

$$\xi = p(u, 0, g_3),$$

on aura

$$y\xi + a = \sqrt{c}\, p'u;$$

d'où

$$x = \frac{1}{pu}, \qquad y = \frac{\sqrt{c}\, p'u - a}{pu},$$

et

$$x\,dy - y\,dx = x^2 d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{\sqrt{c}}{p^2 u} p''u\,du = 6\sqrt{c}\,du,$$

puisque $p''u = 6p^2u - \frac{1}{2}g_2$, et qu'ici $g_2 = 0$. L'aire comprise entre un arc de cubique M_0M_1 et les rayons qui vont de l'origine aux points M_0 et M_1 est donc, si l'on désigne par u_0 et u_1 les paramètres elliptiques de M_0 et M_1 sur la cubique,

$$3\sqrt{c}\int_{u_0}^{u_1} du = 3\sqrt{c}(u_1 - u_0).$$

On obtient par là une interprétation géométrique du paramètre elliptique u, et le théorème sur les arguments de trois points en ligne droite ($u_1 + u_2 + u_3 =$ const.) s'énonce ainsi :

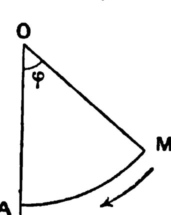
Soit une cubique à asymptotes distinctes, inflexionnelles et concourant en un point O; *une droite la coupe en trois points* M_1, M_2, M_3 : *si la droite se déplace d'une manière quelconque, les aires balayées par les rayons vecteurs* OM_1, OM_2, OM_3 *ont à chaque instant une somme algébrique nulle.*

III. — PENDULE SIMPLE.

221. Une des applications mécaniques les plus simples des fonctions elliptiques est l'étude du mouvement du pendule.

222. Loi du mouvement. — Soit φ l'angle que fait, au temps t, la tige OM (*fig.* 78) du pendule avec la verticale dirigée vers le bas; à l'origine du mouvement, alors que l'angle φ était égal à φ_0.

Fig. 78.



on a abandonné le pendule sans vitesse initiale. La longueur de la tige étant l et l'accélération due à la pesanteur étant g, l'équation du mouvement est, d'après la Mécanique,

$$\frac{l}{g}\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\sin\varphi.$$

Multipliant les deux membres par $\frac{d\varphi}{dt}$, et intégrant par rapport à t, on obtient

$$\frac{1}{2}\frac{l}{g}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \cos\varphi - \cos\varphi_0,$$

puisque, pour $\varphi = \varphi_0$, la vitesse, $l\frac{d\varphi}{dt}$, est nulle.

Cette équation s'écrit

$$\text{(1)} \qquad \sqrt{\frac{2g}{l}}\,dt = \frac{d\varphi}{\pm\sqrt{\cos\varphi - \cos\varphi_0}}.$$

Le second membre se ramènerait à la différentielle elliptique de première espèce en posant $\cos\varphi = x$; nous arriverons à un

résultat plus simple en prenant pour variable $\tan\frac{\varphi}{2}$, ou mieux $\cot\frac{\varphi_0-\varphi}{2}$, qui en est une fonction linéaire. Posons donc

$$\cot\frac{\varphi_0-\varphi}{2}=x;$$

d'où

$$\frac{1}{2}d\varphi\left(1+\cot^2\frac{\varphi_0-\varphi}{2}\right)=dx,\qquad d\varphi=\frac{2\,dx}{1+x^2}.$$

D'ailleurs on a

$$\cos\varphi=\cos(\overline{\varphi_0-\varphi}-\varphi_0)=\cos(\varphi_0-\varphi)\cos\varphi_0+\sin(\varphi_0-\varphi)\sin\varphi_0,$$

et, en utilisant les formules qui donnent $\sin u$ et $\cos u$ en fonction de $\cot\frac{u}{2}$, on trouve

$$\cos\varphi=\frac{x^2-1}{x^2+1}\cos\varphi_0+\frac{2x}{x^2+1}\sin\varphi_0.$$

Portons ces valeurs de $d\varphi$ et de $\cos\varphi$ dans l'équation (1); celle-ci devient

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned}\pm\sqrt{\frac{2g}{l}}\,dt&=\frac{2\,dx}{\sqrt{2(1+x^2)(x\sin\varphi_0-\cos\varphi_0)}}\\&=\frac{2\,dx}{\sqrt{2(x+i)(x-i)(x-\cot\varphi_0)}}\,\frac{1}{\sqrt{\sin\varphi_0}},\end{aligned}\right.$$

et le dernier membre est une différentielle elliptique en x. Pour la réduire à la forme normale, posons (n° 211),

$$x=y+\frac{1}{3}\cot\varphi_0;$$

il vient

$$(3)\qquad \pm\sqrt{\frac{2g}{l}}\,dt=\frac{2\sqrt{2}\,dy}{\sqrt{\sin\varphi_0}\sqrt{4(y-e_1)(y-e_2)(y-e_3)}},$$

étant posé

$$e_1=\frac{2}{3}\cot\varphi_0,\qquad e_2=i-\frac{1}{3}\cot\varphi_0,\qquad e_3=-i-\frac{1}{3}\cot\varphi_0.$$

Faisons maintenant, dans (3), $y=p(u,e_\alpha)$, nous avons

$$\pm\sqrt{\frac{2g}{l}}\,dt=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\sin\varphi_0}}\,\frac{p'u\,du}{p'u}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\sin\varphi_0}}\,du,$$

et, en intégrant,

$$\pm u = \sqrt{\frac{g \sin \varphi_0}{4l}}\, t + C;$$

d'où, en remontant la série des calculs,

$$(4)\qquad x = \cot\frac{\varphi_0 - \varphi}{2} = y + \frac{1}{3}\cot\varphi_0 = \frac{1}{3}\cot\varphi_0 + p\left(\sqrt{\frac{g\sin\varphi_0}{4l}}\, t + C\right).$$

Pour déterminer la constante C, observons que, pour $t = 0$, φ est égal à φ_0; $\cot\frac{\varphi_0 - \varphi}{2}$ est donc infini, ce qui exige que pC soit infini, ou que C soit une période de pu. L'équation (4) s'écrit alors

$$(5)\qquad \cot\frac{\varphi_0 - \varphi}{2} = \frac{1}{3}\cot\varphi_0 + p\left(\sqrt{\frac{g\sin\varphi_0}{4l}}\, t\right);$$

elle donne l'angle φ en fonction du temps t.

223. Discussion. — Désignons, pour simplifier, $\sqrt{\frac{g\sin\varphi_0}{4l}}\, t$ par v; lorsque v croît de o à la demi-période réelle Ω, pv décroît (n° 207) de $+\infty$ à e_1; $\cot\frac{\varphi_0 - \varphi}{2}$ décroît donc de $+\infty$ à $\frac{1}{3}\cot\varphi_0 + e_1$, c'est-à-dire à $\cot\varphi_0$, et par suite l'angle φ décroît de φ_0 à $-\varphi_0$.

La demi-oscillation s'obtient donc en faisant varier t de o à $\sqrt{\frac{4l}{g\sin\varphi_0}}\,\Omega$.

Si l'on continue à faire croître v de Ω à 2Ω, pv, et par suite φ, repasse en sens inverse par les mêmes valeurs, de sorte qu'aux valeurs v et $2\Omega - v$ corresponde une même position du pendule. Pour $v = 2\Omega$, le pendule revient au point de départ.

La durée de l'oscillation *complète*, T, est donc égale à

$$T = 2\sqrt{\frac{4l}{g\sin\varphi_0}}\,\Omega;$$

et, pour Ω, on a la formule (11) du n° 208,

$$\Omega = \int_{e_1}^{\infty}\frac{dy}{\sqrt{4(y-e_1)(y-e_2)(y-e_3)}} = \int_{\cot\varphi_0}^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{4(x^2+1)(x-\cot\varphi_0)}},$$

en posant toujours $y = x - \frac{1}{3}\cot\varphi_0$.

IV. — THÉORÈME DE PONCELET.

224. Euler avait observé qu'on ne peut, en général, inscrire à une circonférence donnée un triangle, qui soit en même temps circonscrit à une autre circonférence *donnée au hasard :* le problème pourtant semble possible *a priori*, le nombre des inconnues étant égal à celui des équations. Euler a également établi que, s'il existe un pareil triangle, il en existe une infinité d'autres. Poncelet a donné à la Remarque d'Euler une extension célèbre que Jacobi a ensuite rattachée à la théorie des fonctions elliptiques. A ce point de vue, nous déduirons le théorème de Poncelet du lemme suivant.

225. Lemme. — Soit S une conique; les coordonnées cartésiennes d'un de ses points peuvent, comme on sait, s'exprimer en fonction d'un paramètre ou argument t, sous la forme

$$(S) \qquad x = \frac{a_1 t^2 + b_1 t + c_1}{a_3 t^2 + b_3 t + c_3}, \qquad y = \frac{a_2 t^2 + b_2 t + c_2}{a_3 t^2 + b_3 t + c_3},$$

les a, b, c étant des constantes. A une valeur de t ne correspond qu'un seul point de la conique S; inversement, à un point de la conique ne correspond qu'une valeur de t : par exemple, t peut être le coefficient angulaire de la droite qui joint le point x, y à un point fixe de la conique.

Les équations (S) ne changent pas de forme si l'on y remplace t par une nouvelle variable θ, définie par

$$(1) \qquad t = \frac{\alpha\theta + \beta}{\gamma\theta + \delta}, \qquad \text{d'où} \qquad \theta = -\frac{\delta t + \beta}{\gamma t - \alpha},$$

α, β, γ, δ étant des constantes. Soient alors t_0, t_1, t_2, t_3 les arguments t de quatre points quelconques de S; e_0, e_1, e_2, e_3 les valeurs de θ qui leur correspondent par (1); je dis que je puis choisir α, β, γ, δ de manière que $e_0 = \infty$ et que $e_1 + e_2 + e_3 = 0$.

Il suffit pour cela de prendre, pour relation (1) entre t et θ, la relation

$$(2) \qquad \theta = \frac{1}{t - t_0} + h, \qquad (h \text{ étant une constante}),$$

de sorte que e_0 sera bien infini, et de déterminer ensuite h de manière que l'on ait

$$(3) \qquad 3h + \frac{1}{t_1 - t_0} + \frac{1}{t_2 - t_0} + \frac{1}{t_3 - t_0} = 0,$$

car $e_1 = \frac{1}{t_1 - t_0} + h; \ldots.$

Ainsi, et c'est le Lemme que nous avions en vue ([1]), on peut représenter paramétriquement une conique par des équations de la forme (S), de manière que les arguments, θ, de quatre points donnés (quelconques), A_0, A_1, A_2, A_3, sur la conique, soient respectivement ∞ et trois quantités de somme nulle (e_1, e_2, e_3).

226. Posons maintenant, dans les équations (S), où l'on a écrit θ à la place de t,

$$\theta = p(u; e_1, e_2, e_3).$$

En vertu de cette relation et des équations (S), à une valeur de pu correspond un seul point de la conique S, et à un point de S, une seule valeur de pu, c'est-à-dire *deux* arguments elliptiques u (à des périodes près), égaux et de signes contraires. En d'autres termes, une valeur de u donne un point de la conique, et à un point de la conique répondent deux arguments, $+u$ et $-u$: bien entendu les arguments $u +$ Période donnent le même point que u.

Cela posé, soit c une constante donnée quelconque; étudions l'enveloppe de la droite qui joint, sur la conique S, les deux points d'arguments u et $c - u$, c'est-à-dire deux points dont les arguments elliptiques ont pour somme c : cette enveloppe est algébrique, puisque $p(c-u)$ est fonction algébrique de pu (n° 198).

Par un point de S, d'arguments $\pm u$, passent évidemment *deux*, et deux seulement de ces droites, à savoir celles qui joignent respectivement ce point aux deux points $c \mp u$; l'enveloppe des droites considérées est donc une courbe de *seconde* classe, c'est-à-dire une conique, T'. Il est facile de trouver les quatre points où

([1]) On vérifie immédiatement, à l'aide de (2) et des expressions $e_1 = \frac{1}{t_1 - t_0} + h, \ldots$ qu'on a, en désignant par k une constante,

$$\frac{dt}{\sqrt{(t-t_0)(t-t_1)(t-t_2)(t-t_3)}} = \frac{k\,d\theta}{\sqrt{(\theta-e_1)(\theta-e_2)(\theta-e_3)}}.$$

la conique S est coupée par T′ : soit u l'argument de l'un d'eux; les deux tangentes menées à T′ par le point u doivent coïncider, et, comme elles joignent respectivement u aux points $c+u$ et $c-u$ de la conique S, il faut que ces deux derniers se confondent, c'est-à-dire que l'on ait

$$c+u=\pm(c-u)+\text{Période}.$$

On doit prendre le signe +, sinon on trouverait pour c, qui est donné arbitrairement, une valeur particulière ($c=\frac{1}{2}$ Période); on aura donc $2u=$ Période, et, par suite, en appelant $2\omega_1$, $2\omega_2$, $2\omega_3$ les périodes de $p(u, e_1, e_2, e_3)$, on obtient les quatre solutions

$$u=0,\ \omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3 \qquad (+\ \text{Période}),$$

ce qui donne

$$pu.\ \text{c'est-à-dire}\ \theta, \qquad =\infty,\ e_1,\ e_2,\ e_3.$$

Les quatre points cherchés sont donc les quatre points donnés primitivement, A_0, A_1, A_2, A_3, sur la conique S. Au point A_0 ($pu=\infty$ ou $u=0$), la conique T′ touche, d'après ce qui précède, la droite qui joint ce point au point d'argument c.

On trouverait évidemment la même conique T′ si l'on changeait c en $-c$, car les points $-c\pm u$, coïncident respectivement avec les points $c\mp u$.

Ainsi : *Soit* S *une conique pour laquelle les coordonnées cartésiennes d'un point s'expriment par des quotients de polynomes du second ordre en* pu, *les deux dénominateurs étant les mêmes : les droites qui joignent sur cette conique deux points dont les arguments elliptiques ont une somme (ou une différence)* (¹) *constante* c *enveloppent une conique* T′; *toutes les coniques* T′, *obtenues ainsi en faisant varier la constante* c, *coupent* S *en quatre mêmes points, qui sont ceux d'arguments elliptiques* 0, ω_1, ω_2, ω_3.

227. *Réciproquement*, considérons les coniques T qui coupent en quatre points, A_0, A_1, A_2, A_3, une conique S, représentée

(¹) Au lieu de la somme, on peut dire la différence, puisque les arguments elliptiques ne sont définis qu'au signe près.

paramétriquement en t par des équations du type (S) : introduisons, à la place de t, un paramètre θ, lié à t par une équation (2), de manière que les arguments θ de A_0, A_1, A_2, A_3 soient ∞ et trois quantités de somme nulle, e_1, e_2, e_3 : si l'on pose $\theta = p(u, e_1, e_2, e_3)$, je dis que chacune des coniques T sera l'enveloppe des droites qui joignent sur S les points d'arguments elliptiques u et $c - u$, c étant une constante convenablement choisie.

Soit, en effet, T la conique considérée; prenons pour $\pm c$ l'argument elliptique du point où la tangente menée à T au point A_0 (qui répond à $\theta = pu = \infty$, c'est-à-dire à $u = 0$) coupe de nouveau la conique S : l'enveloppe correspondante est (n° **226**) une conique T', qui passe, comme T, par A_0, A_1, A_2, A_3 et qui touche en A_0 la droite joignant ce point au point d'argument c, c'est-à-dire qui a en A_0 la même tangente que T; il en résulte immédiatement que T' coïncide avec T [1]. C. Q. F. D.

228. Théorème de Poncelet. — D'après cela, étant données deux coniques *quelconques*, S et T, on peut représenter paramétriquement S, en fonction d'un paramètre pu, de telle sorte que les tangentes menées à T par un point arbitraire de S, d'argument

---

[1] Ce théorème peut recevoir la forme suivante : *Soient u' et u'' les arguments elliptiques des deux points où une tangente de* T *coupe* S; *on a $du' \pm du'' = 0$, quand on passe de cette tangente à la tangente infiniment voisine.* Or, on a posé $\theta = pu$, d'où $d\theta = p'u\,du$, c'est-à-dire

$$du = \frac{d\theta}{\sqrt{4(\theta - e_1)(\theta - e_2)(\theta - e_3)}},$$

ce qui donne

$$\frac{d\theta'}{\sqrt{4(\theta' - e_1)(\theta' - e_2)(\theta' - e_3)}} \pm \frac{d\theta''}{\sqrt{(\theta'' - e_1)(\theta'' - e_2)(\theta'' - e_3)}} = 0.$$

Revenant de θ à l'ancienne variable t, on obtient ainsi, d'après la Note du n° 225, la relation

$$\frac{dt'}{\sqrt{(t' - t_0)(t' - t_1)(t' - t_2)(t' - t_3)}} \pm \frac{dt''}{\sqrt{(t'' - t_0)(t'' - t_1)(t'' - t_2)(t'' - t_3)}} = 0,$$

t' et t'' étant les arguments des deux points où la conique S est coupée par une tangente quelconque de T, et t_0, t_1, t_2, t_3 les arguments des points où elle est coupée par T. (*Voir* une démonstration directe de ce théorème au n° 289, Note.

elliptique $\pm u_1$, coupent de nouveau S respectivement aux points d'arguments $c \pm u_1$, ou encore $u_1 \pm c$, c désignant une constante.

Prenons par exemple la première tangente, celle qui coupe de nouveau S au point u_2, tel que

$$u_2 = u_1 + c.$$

La deuxième tangente menée de u_2 à T coupe S en un nouveau point u_3, tel que

$$u_3 = u_2 + c = u_1 + 2c,$$

et ainsi de suite. On obtient de la sorte sur S des points d'arguments

$$u_1, \quad u_1 + c, \quad u_1 + 2c, \quad u_1 + 3c, \quad \ldots, \quad u_1 + nc, \quad \ldots$$

formant les sommets successifs d'une ligne polygonale dont les côtés touchent T; pour que la ligne se ferme, avec n côtés, il faut que le $(n+1)^{\text{ième}}$ sommet coïncide avec u_1, c'est-à-dire que l'on ait

(4) $$u_1 + nc = u_1 + \text{Période } [1],$$

d'où

$$nc = \text{Période}.$$

Cette condition est indépendante du point initial u_1; si elle est vérifiée, la figure polygonale se fermera toujours, quel que soit le point de départ, sinon elle ne se fermera jamais.

Donc :

Deux coniques étant données, il n'existe pas, en général, de polygone de n côtés, inscrit à l'une et circonscrit à l'autre; si un tel polygone existe, il y en a une infinité d'autres.

---

[1] Le point $-u$ étant, sur S, le même que le point u, on aurait pu aussi écrire

$$u_1 + nc = -u_1 + \text{Période}.$$

Mais en ce cas on n'aurait pas un véritable polygone. Le deuxième sommet $u_1 + c$, coïnciderait en effet avec le $n^{\text{ième}}$, $u_1 + (n-1)c$, car, en vertu de l'équation précédente, on a

$$u_1 + (n-1)c = -(u_1 + c) + \text{Période};$$

et ainsi de suite; on trouverait donc une ligne polygonale repliée sur elle-même

229. On peut déduire de la théorie précédente d'autres conséquences intéressantes, également dues à Poncelet.

1° *Si les sommets d'un polygone de n côtés se déplacent sur une conique* S, *et si les* $(n-1)$ *premiers côtés restent tangents à une conique* T, *l'enveloppe du* $n^{\text{ième}}$ *côté est une conique, qui passe par les quatre points d'intersection de* S *et de* T.

Car, S et T étant les coniques du numéro précédent, si u_1, u_2, ..., u_n désignent les arguments elliptiques, sur S, des n sommets, et si les $(n-1)$ premiers côtés touchent T, on aura (n° 228)

$$u_2 = u_1 + c, \qquad u_3 = u_1 + 2c, \qquad \ldots, \qquad u_n = u_1 + (n-1)c.$$

Le $n^{\text{ième}}$ côté est celui qui joint les sommets u_n et u_1 ; la différence $u_n - u_1$ étant la constante $(n-1)c$, l'enveloppe de ce côté est (n° 226) une conique passant par les quatre points d'arguments elliptiques 0, ω_1, ω_2, ω_3, c'est-à-dire par les quatre points A_0, A_1, A_2, A_3, communs à S et à T.

2° *Si les sommets d'un polygone de n côtés se déplacent sur une conique* S, *et si* $(n-1)$ *de ses côtés restent respectivement tangents à* $(n-1)$ *coniques* $T, T_1, \ldots, T_{n-2}$, *coupant toutes* S *en quatre mêmes points, l'enveloppe du* $n^{\text{ième}}$ *côté est une conique* T_{n-1}, *qui passe aussi par ces quatre points.*

Car les arguments elliptiques, sur S, des sommets successifs du polygone sont

$$u_1, \qquad u_2 = u_1 + c, \qquad u_3 = u_1 + c + c_1, \qquad \ldots,$$
$$u_n = u_1 + c + c_1 + \ldots + c_{n-2},$$

et la différence $u_n - u_1$ est encore constante.

De même, la droite qui joint le sommet de rang h au sommet de rang k enveloppe également une conique, qui passe par les quatre mêmes points.

230. Application au pendule. — Nous avons trouvé (n° 222), pour l'angle φ du pendule avec la verticale, au temps t, la formule

$$(5) \qquad \cot\frac{\varphi_0 - \varphi}{2} = \frac{1}{3}\cot\varphi_0 + pv,$$

v désignant une quantité proportionnelle au temps. On déduit de là, pour $\cot\frac{\varphi}{2}$, une expression de la forme $\cot\frac{\varphi}{2} = \frac{m + n\,pv}{m' + n'\,pv}$, les m et n étant des constantes : par suite, *les coordonnées* $l\sin\varphi$ et $l\cos\varphi$, du point pesant pendulaire qui décrit une circonférence Σ de rayon l, auront, en fonction de pv, des expressions du type

$$l\cos\varphi = \frac{a_1 p^2 v + b_1 pv + c_1}{a_3 p^2 v + b_3 pv + c_3}; \qquad l\sin\varphi = \frac{a_2 p^2 v + b_2 pv + c_2}{a_3 p^2 v + b_3 pv + c_3}$$

$$(a_i,\ b_i,\ c_i = \text{const.}).$$

Ces expressions sont semblables à celles introduites aux n^{os} **225** et **226** pour la conique S ; donc la droite qui joint sur la circonférence Σ deux points dont les arguments v ont une différence fixe, c'est-à-dire deux positions du pendule séparées par un intervalle de temps constant, enveloppe une conique, T′, coupant Σ aux points pour lesquels on a

$$pv = \infty,\ e_1,\ e_2,\ e_3.$$

Or la formule (5) ci-dessus donne respectivement, pour $pv = \infty$ et $pv = e_1 = \frac{2}{3}\cot\varphi_0$, les valeurs $\varphi = \varphi_0$ et $\varphi = -\varphi_0$, comme on l'a vu d'ailleurs au n° **223** : les points correspondants sur Σ sont la position initiale du point pesant, et sa symétrique par rapport à la verticale du point de suspension. Pour $pv = e_2$ ou e_3, c'est-à-dire $pv = \pm i - \frac{1}{3}\cot\varphi_0$, on a

$$\cot\frac{\varphi_0 - \varphi}{2} = \pm i, \qquad \text{ou} \qquad \frac{\cot\frac{\varphi}{2} - \cot\frac{\varphi_0}{2}}{1 + \cot\frac{\varphi}{2}\cot\frac{\varphi_0}{2}} = \pm i,$$

ce qui donne

$$\cot\frac{\varphi}{2} = \pm i; \qquad \text{d'où} \qquad \cot\varphi = \pm i,$$

et les deux points correspondants sur Σ sont les points circulaires à l'infini. La conique T′ est donc une *circonférence,* qui passe par la position initiale du point pesant et sa symétrique par rapport à la verticale du point de suspension. Donc enfin :

Soit un point pesant pendulaire, partant sans vitesse initiale d'une position A_0 ; *désignons par* A'_0 *le symétrique de* A_0

par rapport à la verticale du point de suspension : la droite qui joint deux positions du point pesant correspondant à un écart de temps donné enveloppe une circonférence qui passe par A_0 *et* A'_0 ; ou encore :

Si deux pendules de même longueur sont partis sans vitesse initiale de la même position OA_0, *mais à des moments différents, la droite qui joint à chaque instant leurs extrémités enveloppe une circonférence passant par* A_0 *et* A'_0 (Jacobi).

231. Arc de lemniscate. — L'hyperbole S, $x^2-y^2=a^2$, a pour représentation paramétrique

$$x = a\frac{t^2+1}{2t}, \qquad y = a\frac{t^2-1}{2t}. \tag{6}$$

Elle est coupée par la conique T, d'équation

$$\lambda(x^2+y^2)+x^2-y^2-a^2=0,$$

quel que soit λ, aux quatre points dont les arguments t sont les racines de l'équation $t^4+1=0$; donc (note du n° **227**), si t' et t'' sont les arguments des points où une tangente quelconque de T rencontre S, on a

$$\frac{dt'}{\sqrt{t'^4+1}} \pm \frac{dt''}{\sqrt{t''^4+1}} = 0. \tag{7}$$

D'ailleurs la droite $ux+vy-1=0$ sera une tangente de T si l'on a

$$\frac{a^2u^2}{\lambda+1}+\frac{a^2v^2}{\lambda-1}=1. \tag{8}$$

La transformée de l'hyperbole S par inversion, l'origine étant pôle et la puissance a^2, est la *Lemniscate* L

$$(\xi^2+\eta^2)^2 = a^2(\xi^2-\eta^2),$$

et, pour le point (ξ, η), transformé du point (6), (x, y), de l'hyperbole, on a

$$\xi = \frac{a^2x}{x^2+y^2} = a\frac{t^3+t}{t^4+1}, \qquad \eta = \frac{a^2y}{x^2+y^2} = a\frac{t^3-t}{t^4+1}. \tag{9}$$

La tangente, $ux+vy-1=0$, de T a pour inverse le cercle

$$a^2(u\xi+v\eta) = (\xi^2+\eta^2),$$

dont le centre, $\frac{1}{2}a^2u$, $\frac{1}{2}a^2v$, est, en vertu de (8), sur la conique

$$\frac{X^2}{\lambda+1}+\frac{Y^2}{\lambda-1}=\frac{a^2}{4}:$$

celle-ci a pour foyers, quel que soit λ, les deux points d'abscisses $\pm\frac{a}{\sqrt{2}}$ sur l'axe des x, points que l'on nomme les *foyers singuliers* de la Lemniscate L.

Donc, en vertu de ce qui précède, si t' et t'' sont les arguments des deux points (autres que l'origine et les points circulaires à l'infini) où la Lemniscate (9) est coupée par un cercle mené par l'origine, et si ce cercle varie de manière que son centre décrive une conique ayant pour foyers les foyers singuliers de L, on aura, entre t', t'' et leurs différentielles, l'équation (7).

D'ailleurs, des expressions (9) de ξ et η en fonction de t, on tire

$$d\xi^2+d\eta^2=\frac{2a^2}{t^4+1}dt^2;$$

d'où pour l'élément d'arc ds, de la Lemniscate, $ds=a\sqrt{2}\frac{dt}{\sqrt{t^4+1}}$, de sorte que l'équation (7) s'écrit $ds'\pm ds''=0$.

En d'autres termes :

Soient M′ *et* M″ *les deux points mobiles où une Lemniscate* L *est coupée par une circonférence quelconque passant par son point double : si l'on fait varier la circonférence, de manière que son centre reste sur une conique ayant pour foyers réels les deux foyers singuliers de* L, *les arcs de Lemniscate parcourus par les points* M′ *et* M″ *sont à chaque instant égaux.*

CHAPITRE V.

CALCULS NUMÉRIQUES.

Le problème que nous allons aborder dans ce Chapitre est celui du calcul effectif des fonctions pu, ζu, σu, quand on part des invariants g_2 et g_3.

A cet effet, nous introduirons d'abord une nouvelle fonction, la fonction $\theta(u)$, qui est liée à σu d'une manière simple, et qui offre l'avantage de pouvoir être exprimée par une série très convergente.

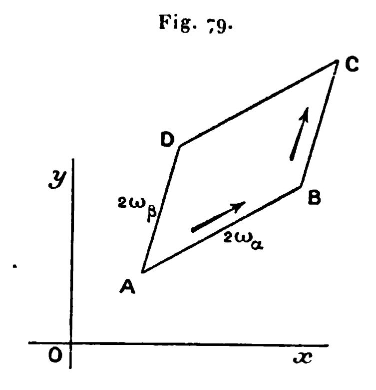
232. Retour sur la fonction σu. — Reprenons la fonction σu, formée avec les périodes $2\omega_\alpha$, $2\omega_\beta$, $2\omega_\gamma$, $(\omega_\alpha + \omega_\beta + \omega_\gamma = 0)$; on a (n° 178)

$$(1) \qquad \sigma(u + 2\omega_\alpha) = -e^{2\eta_\alpha(u+\omega_\alpha)}\sigma u$$

étant posé $\eta_\alpha = \zeta\omega_\alpha$. Il y a entre les quantités η_α et ω_α des relations remarquables.

Supposons, pour fixer les idées, que le rapport $\omega_\beta : \omega_\alpha$ ait sa

Fig. 79.



partie imaginaire positive, et considérons (*fig.* 79) un parallélogramme construit, à partir d'un point quelconque A, avec les deux périodes $2\omega_\alpha$, $2\omega_\beta$. Je dis que si l'on décrit le contour du parallé-

logramme à partir de A, en commençant par le côté AB, qui représente $2\omega_\alpha$, on le décrit dans le sens positif, c'est-à-dire que l'angle BAD est compris entre o et π. En effet, soit posé

$$2\omega_\alpha = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi), \qquad 2\omega_\beta = \rho'(\cos\varphi' + i\sin\varphi'),$$

on a

$$\frac{\omega_\beta}{\omega_\alpha} = \frac{\rho'}{\rho}[\cos(\varphi' - \varphi) + i\sin(\varphi' - \varphi)],$$

et, puisque le rapport $\omega_\beta : \omega_\alpha$ a sa partie imaginaire positive, l'angle $\varphi' - \varphi$, c'est-à-dire l'angle BAD, a son sinus positif, ce qui établit la proposition.

Cela posé, l'intégrale $\frac{1}{2\pi i}\int \zeta u\, du$, le long du contour ABCD, est égale, d'après le théorème des résidus, à l'unité, car ζu n'a qu'un pôle à l'intérieur du contour, avec le résidu $+1$; mais, à cause de la relation $\zeta(u + 2\omega_\beta) = \zeta u + 2\eta_\beta$, on a évidemment

$$\int_{AB} \zeta u\, du + \int_{CD} \zeta u\, du = -\int_{AB} 2\eta_\beta\, du = -4\eta_\beta\omega_\alpha;$$

et, de même,

$$\int_{BC} \zeta u\, du + \int_{DA} \zeta u\, du = 4\eta_\alpha\omega_\beta,$$

d'où la relation finale

(2) $$\frac{1}{2\pi i}(4\eta_\alpha\omega_\beta - 4\eta_\beta\omega_\alpha) = 1 \quad \text{ou} \quad \eta_\alpha\omega_\beta - \eta_\beta\omega_\alpha = \frac{\pi i}{2}.$$

233. La fonction thêta. — Posons pour un instant

(3) $$F(u) = \frac{1}{2\omega_\alpha} e^{-\eta_\alpha \frac{u^2}{2\omega_\alpha}} \sigma u:$$

on a, en vertu des relations (1),

(4) $$\begin{cases} F(u + 2\omega_\alpha) = -F(u), \\ F(u + 2\omega_\beta) = -F(u) e^{2\eta_\beta(u + \omega_\beta) - \frac{\eta_\alpha}{2\omega_\alpha}(4u\omega_\beta + 4\omega_\beta^2)}, \end{cases}$$

ou, en tenant compte de (2),

$$F(u + 2\omega_\beta) = -F(u) e^{-\frac{\pi i}{\omega_\alpha}(u + \omega_\beta)};$$

ce qui, si l'on pose $q = e^{\pi i \frac{\omega_3}{\omega_\alpha}}$, s'écrit

$$(5) \qquad F(u + 2\omega_3) = -q^{-1} e^{-\pi i \frac{u}{\omega_\alpha}} F(u).$$

On voit, par (4), que $F(u)$ change de signe par l'addition à u de $2\omega_\alpha$; donc la fonction $F(u) : e^{i\pi \frac{u}{2\omega_\alpha}}$ admettra la période $2\omega_\alpha$, et comme, en vertu de (3), elle est, ainsi que σu, holomorphe dans tout le plan, on pourra, *dans tout le plan,* la développer en série de Fourier (n° **124**), ordonnée suivant les puissances entières, négatives et positives, de l'exponentielle $e^{i\pi \frac{u}{\omega_\alpha}}$:

$$F(u) : e^{i\pi \frac{u}{2\omega_\alpha}} = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_n e^{ni\pi \frac{u}{\omega_\alpha}}$$

ou

$$(6) \qquad F(u) = \sum A_n e^{(2n+1)i\pi \frac{u}{2\omega_\alpha}}.$$

Écrivons maintenant que $F(u)$ satisfait à la relation (5), il vient

$$\sum A_n e^{(2n+1)i\pi \frac{u+2\omega_3}{2\omega_\alpha}} = -q^{-1} \sum A_n e^{(2n-1)i\pi \frac{u}{2\omega_\alpha}},$$

d'où, en égalant dans les deux membres les coefficients de $e^{(2n-1)i\pi \frac{u}{2\omega_\alpha}}$,

$$A_{n-1} q^{2n-1} = -q^{-1} A_n \qquad \text{ou} \qquad A_n = -q^{2n} A_{n-1}.$$

On en conclut immédiatement

$$A_n = (-1)^n q^{2n+2(n-1)+\ldots+2} A_0 = (-1)^n q^{n^2+n} A_0,$$

et, en posant $A_0 = \frac{A}{i} q^{\frac{1}{4}}$, on obtient, pour $F(u) : A$, la série, que nous désignerons par $\theta(u)$,

$$(7) \qquad \frac{F(u)}{A} = \theta(u) = \frac{1}{i} \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} e^{(2n+1)i\pi \frac{u}{2\omega_\alpha}}.$$

D'après les propriétés de la série de Fourier, cette série converge

absolument et uniformément (¹) dans toute région finie du plan; en vertu de la définition (3) de $F(u)$, elle représente une fonction entière; ses dérivées successives s'obtiennent (n° **117**) en la dérivant terme à terme.

On peut écrire la série $\theta(u)$, en groupant les termes qui répondent à n et à $-n-1$,

$$(8) \qquad \theta(u) = 2\sum_{0}^{+\infty}(-1)^n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}\sin(2n+1)\frac{\pi u}{2\omega_\alpha}.$$

La liaison entre σu et θu est donnée par (3) et (7) :

$$(9) \qquad \theta(u) = \frac{1}{2A\omega_\alpha}\, e^{-\eta_\alpha \frac{u^2}{2\omega_\alpha}}\, \sigma u,$$

où A est une constante qui reste à déterminer. Or, pour $u=0$, le rapport $\sigma u : u$ tend vers 1, puisque $\sigma u = u + d_1 u^5 + \ldots$; c'est dire que, en vertu de (9), la dérivée de $\theta(u)$, pour $u=0$, est $\frac{1}{2A\omega_\alpha}$. On a donc, en formant $\theta'(0)$ d'après (8),

$$(10) \qquad \frac{1}{A} = 2\pi\sum_{0}^{\infty}(2n+1)q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} = 2\pi\left(q^{\frac{1}{4}} - 3q^{\frac{9}{4}} + 5q^{\frac{25}{4}} - \ldots\right).$$

La fonction $\theta(u)$ est impaire en u, en vertu de (9), puisque σu est impaire; elle vérifie, comme $F(u)$, les relations (4) et (5).

234. D'une fonction σu donnée, on peut déduire, par la méthode précédente, une infinité de fonctions *thêta*, puisque $2\omega_\alpha$, $2\omega_\beta$ désignent un système primitif quelconque (²) de périodes de σ, et que σ ne change pas (n° **181**) quand on remplace un système primitif par un autre : toutes ces fonctions *thêta* ne diffèrent, en vertu de (9), que par un facteur exponentiel, mais leurs développements en série, (7) ou (8), sont plus ou moins rapidement convergents selon la valeur de q.

Dans les calculs numériques qui vont suivre, nous supposerons qu'on part des invariants g_2 et g_3, et que les racines e_1, e_2, e_3 sont

(¹) On vérifierait directement la convergence de la série des modules en tenant compte de ce que $\omega_\beta : \omega_\alpha$ a sa partie imaginaire positive; il suffit d'étudier $\sqrt[n]{\operatorname{mod} u_n}$.
(²) On suppose toutefois que $\omega_\beta : \omega_\alpha$ a sa partie imaginaire positive.

réelles : nous avons vu, en effet (Tome I, n° 230), que, dans la réduction des intégrales réelles elliptiques, on pouvait toujours faire en sorte que le polynome du troisième ordre sous le radical eût ses racines réelles, et cela sans introduire d'imaginaires dans les calculs.

Soit posé $e_1 > e_3 > e_2$; la fonction $p(u, e_\alpha)$ admet une demi-période réelle Ω, et une demi-période imaginaire $\Omega' i$ (Ω et $\Omega' > 0$); on a

$$p\Omega = e_1, \qquad p(\Omega' i) = e_2 \qquad (\text{n}^\circ\ 205),$$

et les périodes 2Ω, $2\Omega' i$ forment un système primitif.

Dans tout ce qui suit, nous formerons la fonction *thêta* d'après la règle suivante, en ne perdant pas de vue que $e_1 > e_3 > e_2$.

1° Si e_3 est négatif, nous ferons, dans les formules (7), (8), (9), (10),

$$\omega_\alpha = \Omega, \qquad \omega_\beta = +\Omega' i, \qquad \omega_\gamma = -\Omega - \Omega' i,$$

d'où

$$q = e^{-\pi\frac{\Omega'}{\Omega}}, \qquad e_\alpha = e_1, \qquad e_\beta = e_2, \qquad e_\gamma = e_3.$$

2° Si e_3 est positif, nous poserons

$$\omega_\alpha = -\Omega' i, \qquad \omega_\beta = \Omega, \qquad \omega_\gamma = -\Omega + \Omega' i,$$

d'où

$$q = e^{-\pi\frac{\Omega}{\Omega'}}, \qquad e_\alpha = e_2, \qquad e_\beta = e_1, \qquad e_\gamma = e_3,$$

et nous aurons, dans les deux cas, puisque $\omega_\beta : \omega_\alpha$ et $\omega_\alpha : \omega_\gamma$ ont leurs parties imaginaires positives (n° 232),

$$(11) \qquad \eta_\alpha \omega_\beta - \eta_\beta \omega_\alpha = \frac{\pi i}{2}, \qquad \eta_\gamma \omega_\alpha - \eta_\alpha \omega_\gamma = \frac{\pi i}{2}.$$

Dans les deux cas aussi, q est réel et positif, ce qui simplifie beaucoup les calculs [1].

---

[1] Mais l'avantage principal de cette règle est que, dans les deux cas, q est certainement inférieur à $e^{-\pi}$, soit environ $\frac{1}{20}$, de sorte que les puissances de q deviennent rapidement négligeables.

Pour l'établir, démontrons un lemme.

Lemme. — *Pour que Ω soit égal à Ω', il faut et il suffit que e_3 soit nul.*

En effet, soit $\Omega' = \Omega$: les périodes 2Ω et $2\Omega' i$ formant un système primitif,

235. Cela posé, e_α et ω_α, e_β et ω_β, e_γ étant définis comme on vient de le dire, écrivons la formule (23) du n° **200**,

$$pu - e_\beta = e^{-2\eta_\beta u} \frac{\sigma^2(u+\omega_\beta)}{\sigma^2(\omega_\beta)\sigma^2 u},$$

et remplaçons-y σu par sa valeur en $\theta(u)$, tirée de (9); nous avons, après réductions, en tenant compte de (11),

$$pu - e_\beta = e^{\pi i \frac{u}{\omega_\alpha}} \left[\frac{1}{2A\omega_\alpha} \frac{\theta(u+\omega_\beta)}{\theta(u)\theta(\omega_\beta)}\right]^2,$$

et, de même,

$$pu - e_\gamma = e^{-\pi i \frac{u}{\omega_\alpha}} \left[\frac{1}{2A\omega_\alpha} \frac{\theta(u+\omega_\gamma)}{\theta(u)\theta(\omega_\gamma)}\right]^2.$$

Si l'on remplace, dans ces formules, θ par son expression (7) en série, et $\frac{1}{A}$ par sa valeur (10), on obtient, après quelques calculs

---

on a (n° 185)

$$g_3 = 140 \sum{}' \frac{1}{(2m\Omega + 2m'\Omega i)^6} = \frac{140}{\Omega^6} \sum{}' \frac{1}{2^6(m+m'i)^6};$$

or, les termes de g_3 qui répondent respectivement à m, m' et à m', $-m$ ont une somme nulle, car $(m+m'i)^6 = -(m'-mi)^6$; on a donc $g_3 = 0$, d'où $e_3 = 0$ et $e_2 = -e_1$, puisque $e_1+e_2+e_3 = 0$. Inversement, si $e_3 = 0$ et $e_2 = -e_1$, on a (n° 205)

$$\Omega = \int_{-e_1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{4x(x^2-e_1^2)}}, \qquad -\Omega' i = \int_0^{e_1} \frac{dx}{\sqrt{4x(x^2-e_1^2)}},$$

d'où, évidemment, $\Omega' = \Omega$.

Par suite, si l'on suppose par exemple $e_3 < 0$, et si e_1, e_2, e_3 varient sans que e_3 cesse d'être négatif, la différence réelle, $\Omega - \Omega'$, ne pouvant s'annuler, garde un signe constant. Pour déterminer ce signe, prenons le cas particulier $e_3 = -1$, $e_2 = -1 - \varepsilon$, $e_1 = 2 + \varepsilon$, et faisons tendre ε vers zéro par valeurs positives : on reconnaît sans difficulté que Ω', c'est-à-dire

$$\operatorname{mod} \int_{-1}^{2+\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{4(x+1)(x+1+\varepsilon)(x-2-\varepsilon)}}$$

tend vers l'infini, tandis que Ω reste fini; donc, si $e_3 < 0$, on a $\Omega' > \Omega$. Au contraire, si $e_3 > 0$, on reconnaît de même que $\Omega' < \Omega$; donc, dans les deux cas, la quantité q définie plus haut, $e^{-\pi\frac{\Omega'}{\Omega}}$ si $e_3 < 0$, et $e^{-\pi\frac{\Omega}{\Omega'}}$ si $e_3 > 0$, est inférieure à $e^{-\pi}$.

faciles,

$$
(12)\quad
\begin{cases}
pu - e_\beta = \dfrac{\pi^2}{4\omega_\alpha^2}\left(\dfrac{q^{\frac{1}{4}} - 3q^{\frac{9}{4}} + 5q^{\frac{25}{4}} - \dots}{1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + \dots} \cdot \dfrac{1 - 2q\cos\dfrac{\pi u}{\omega_\alpha} + 2q^4\cos 2\dfrac{\pi u}{\omega_\alpha} - 2q^9\cos 3\dfrac{\pi u}{\omega_\alpha} - \dots}{q^{\frac{1}{4}}\sin\dfrac{\pi u}{2\omega_\alpha} - q^{\frac{9}{4}}\sin 3\dfrac{\pi u}{2\omega_\alpha} + q^{\frac{25}{4}}\sin 5\dfrac{\pi u}{2\omega_\alpha} - \dots}\right. \\[2ex]
pu - e_\gamma = \dfrac{\pi^2}{4\omega_\alpha^2}\left(\dfrac{q^{\frac{1}{4}} - 3q^{\frac{9}{4}} + 5q^{\frac{25}{4}} - \dots}{1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \dots} \cdot \dfrac{1 + 2q\cos\dfrac{\pi u}{\omega_\alpha} + 2q^4\cos 2\dfrac{\pi u}{\omega_\alpha} + 2q^9\cos 3\dfrac{\pi u}{\omega_\alpha} \dots}{q^{\frac{1}{4}}\sin\dfrac{\pi u}{2\omega_\alpha} - q^{\frac{9}{4}}\sin 3\dfrac{\pi u}{2\omega_\alpha} + q^{\frac{25}{4}}\sin 5\dfrac{\pi u}{2\omega_\alpha} - \dots}\right.
\end{cases}
$$

Enfin, faisons $u = \omega_\alpha$ dans la première de ces formules; nous trouvons

$$
(13)\quad e_\alpha - e_\beta = \frac{\pi^2}{4\omega_\alpha^2}\left(\frac{q^{\frac{1}{4}} - 3q^{\frac{9}{4}} + 5q^{\frac{25}{4}} - \dots}{1 - 2q + 2q^4 - \dots} \cdot \frac{1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \dots}{q^{\frac{1}{4}} + q^{\frac{9}{4}} + q^{\frac{25}{4}} + \dots}\right)^2,
$$

et, en divisant membre à membre les formules (12), où nous faisons $u = \omega_\alpha$,

$$
(14)\quad \frac{e_\alpha - e_\gamma}{e_\alpha - e_\beta} = \left(\frac{1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + \dots}{1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \dots}\right)^4.
$$

236. Calculs définitifs. — Observons maintenant que, pour pousser jusqu'aux chiffres le calcul des intégrales elliptiques, tel qu'il a été indiqué au n° 210, il est nécessaire et suffisant de savoir résoudre les deux problèmes suivants :

1° *Étant donnés g_2 et g_3, calculer pu, ζu, σu pour une valeur donnée de u;*

2° *Calculer u connaissant pu, c'est-à-dire résoudre l'équation en u, $x_0 = pu$.*

237. Premier problème. — On calculera d'abord les racines e_1, e_2, e_3 du polynome $4z^3 - g_2 z - g_3 = 0$, $(e_1 > e_3 > e_2)$; nous savons (n° 234) qu'on a pu faire en sorte qu'elles soient réelles : *désignons-les par e_α, e_β, e_γ, suivant les indications du n° 234.*

Calcul de q. — Déterminons maintenant la quantité q, ou $e^{i\pi\frac{\omega_\beta}{\omega_\alpha}}$. On a, par (14),

$$
\frac{e_\alpha - e_\gamma}{e_\alpha - e_\beta} = \left(\frac{1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + \dots}{1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \dots}\right)^4,
$$

équation d'où l'on peut tirer q; on sait que la quantité q cherchée est réelle, positive et inférieure à $\frac{1}{23}$; on la trouvera donc en écrivant

$$\frac{1-2q+2q^4-2q^9+\dots}{1+2q+2q^4+2q^9+\dots}=\sqrt[4]{\frac{e_\alpha-e_\gamma}{e_\alpha-e_\beta}},$$

la racine quatrième étant la racine quatrième arithmétique, positive, de la quantité *positive* (n° **234**) $(e_\alpha-e_\gamma):(e_\alpha-e_\beta)$. On résoudra cette équation en q par approximation; on négligera, par exemple, q^4, q^9, ..., en prenant

$$\frac{1-2q}{1+2q}=\sqrt[4]{\frac{e_\alpha-e_\gamma}{e_\alpha-e_\beta}},$$

d'où une valeur approchée de q; pour avoir une approximation plus grande, on remplacera q par cette valeur dans les termes q^4, q^9, ..., et l'on obtiendra une nouvelle équation donnant encore q linéairement, etc.

Calcul de ω_α, ω_β, ω_γ. — Connaissant q, on obtiendra ω_α par (13) :

$$e_\alpha-e_\beta=\frac{\pi^2}{4\omega_\alpha^2}\left(\frac{q^{\frac14}-3q^{\frac94}+5q^{\frac{25}{4}}+\dots}{1-2q+2q^4-\dots}\cdot\frac{1+2q+2q^4+\dots}{q^{\frac14}+q^{\frac94}+q^{\frac{25}{4}}+\dots}\right)^2;$$

q étant très petit, quelques termes suffiront dans chaque série; on choisira le signe de ω_α d'après les règles du n° **234**. L'équation

$$q=e^{i\pi\frac{\omega_\beta}{\omega_\alpha}}\qquad\text{ou}\qquad \omega_\beta=\frac{\omega_\alpha}{\pi i}\operatorname{Log\,nép.}q$$

donnera ensuite ω_β, et ω_γ sera $-(\omega_\alpha+\omega_\beta)$.

Calcul de σu. — On se servira de (9) :

$$\sigma u=2A\omega_\alpha e^{\eta_\alpha\frac{u^2}{2\omega_\alpha}}\theta(u),$$

où l'on fera

$$\frac{1}{A}=2\pi\left(q^{\frac14}-3q^{\frac94}+5q^{\frac{25}{4}}-\dots\right),$$

$$\theta(u)=\frac{1}{i}\sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^n q^{\left(n+\frac12\right)^2}e^{(2n+1)i\pi\frac{u}{2\omega_\alpha}}$$

$$=2\left(q^{\frac14}\sin\frac{\pi u}{2\omega_\alpha}-q^{\frac94}\sin 3\frac{\pi u}{2\omega_\alpha}+q^{\frac{25}{4}}\sin 5\frac{\pi u}{2\omega_\alpha}-\dots\right).$$

Quant à η_α, on le calculera en observant que $\sigma'''(0)$ est nul, en raison du développement $\sigma u = u + d_1 u^5 + \ldots$. Écrivant alors que la dérivée troisième de

$$e^{\eta_\alpha \frac{u^2}{2\omega_\alpha}} \theta(u)$$

s'annule pour $u = 0$, et observant que $\theta(0)$ et $\theta''(0)$ sont nuls, puisque $\theta(u)$ est impaire, on a

$$\eta_\alpha \omega_\alpha = -\frac{1}{3}\omega_\alpha^2 \frac{\theta'''(0)}{\theta'(0)} = \frac{\pi^2}{12}\,\frac{q^{\frac{1}{4}} - 3^3 q^{\frac{9}{4}} + 5^3 q^{\frac{25}{4}} - \ldots}{q^{\frac{1}{4}} - 3q^{\frac{9}{4}} + 5q^{\frac{25}{4}} - \ldots}.$$

Calcul de ζu. — Par définition, $\zeta u = \dfrac{\sigma' u}{\sigma u} = \dfrac{\eta_\alpha u}{\omega_\alpha} + \dfrac{\theta'(u)}{\theta(u)}$; tout est connu au dernier membre, car

$$\theta'(u) = \frac{\pi}{2\omega_\alpha}\sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}(2n+1)\, e^{(2n+1)i\pi\frac{u}{2\omega_\alpha}}$$

$$= \frac{\pi}{\omega_\alpha}\left(q^{\frac{1}{4}}\cos\frac{\pi u}{2\omega_\alpha} - 3q^{\frac{9}{4}}\cos 3\frac{\pi u}{2\omega_\alpha} + 5q^{\frac{25}{4}}\cos 5\frac{\pi u}{2\omega_\alpha} - \ldots\right).$$

Calcul de pu. — On emploiera l'une des deux formules (12), dans les seconds membres desquelles tout est connu; on pourrait aussi partir de la relation

$$-pu = \zeta' u = \frac{\eta_\alpha}{\omega_\alpha} + \frac{\theta''(u)\,\theta(u) - \theta'^2(u)}{\theta^2(u)}.$$

238. Second problème. — Il s'agit de calculer u, connaissant pu.

Observons d'abord que nous avons le droit de supposer que u est à l'intérieur ou sur les côtés du rectangle construit sur les périodes 2Ω, $2\Omega' i$, c'est-à-dire $2\omega_\alpha$ et $2\omega_\beta$, et dont le centre est à l'origine : car l'équation $pu = x_0$ a, dans ce rectangle, deux solutions en u, u_0 et $-u_0$, égales et de signes contraires. Pour chacune d'elles la partie réelle et le coefficient de i sont respectivement compris entre $-\Omega$ et $+\Omega$, et entre $-\Omega'$ et $+\Omega'$, de sorte que les quantités, inverses l'une de l'autre,

$$e^{-\pi i \frac{u_0}{\omega_\alpha}} \quad \text{et} \quad e^{\pi i \frac{u_0}{\omega_\alpha}}$$

ont leur module compris, *dans tous les cas*, entre q et $\dfrac{1}{q}$.

Pour calculer ces deux valeurs de u, divisons membre à membre les deux équations (12) ; nous avons

$$(15)\quad \sqrt{\frac{pu-e_3}{pu-e_\gamma}} = \frac{1+2q+2q^4+\ldots}{1-2q+2q^4-\ldots} \cdot \frac{1-2q\cos\frac{\pi u}{\omega_\alpha}+2q^4\cos 2\frac{\pi u}{\omega_\alpha}-\ldots}{1+2q\cos\frac{\pi u}{\omega_\alpha}+2q^4\cos 2\frac{\pi u}{\omega_\alpha}+\ldots}.$$

Dans le premier membre, le signe doit être choisi de manière que la partie réelle soit positive ([1]), et l'on peut écrire, puisque pu et q sont connus,

$$(16)\quad \frac{1-2q\cos\frac{\pi u}{\omega_\alpha}+2q^4\cos 2\frac{\pi u}{\omega_\alpha}-\ldots}{1+2q\cos\frac{\pi u}{\omega_\alpha}+2q^4\cos 2\frac{\pi u}{\omega_\alpha}+\ldots} = \mathrm{M}.$$

([1]) On a vu (n° 207) que, u étant réel, pu varie de $+\infty$ à e_1; la formule (8) d'homogénéité du n° 206, où l'on fait $\lambda = -1$, donne

$$p(ui, g_2, -g_3) = -p(u, g_2, g_3),$$

c'est-à-dire

$$p(ui, e_\alpha) = -p(u, -e_\alpha),$$

ce qui montre que, u étant purement imaginaire, pu varie de $-\infty$ à $-e_2$, qui est la plus grande des racines $-e_\alpha$. Enfin les formules d'addition du n° 199, où l'on fait $\omega_1 = \Omega$, $\omega_2 = \Omega' i$, donnent

$$p(u+\Omega' i) = e_2 + \frac{(e_2-e_3)(e_2-e_1)}{pu-e_2}; \qquad p(vi+\Omega) = e_1 + \frac{(e_1-e_2)(e_1-e_3)}{p(vi)-e_2};$$

on en conclut que : 1° u étant réel, $p(u+\Omega' i)$ varie de e_2 à e_3 ; 2° v étant réel, $p(vi+\Omega)$ varie de e_1 à e_3. En réunissant ces résultats, on voit que :

(1)	u étant réel,	pu varie de	$+\infty$	à	e_1,
(2)	u étant $vi+\Omega$,	pu	» e_1	à	e_3,
(3)	u étant $u+\Omega' i$,	pu	» e_3	à	e_2,
(4)	u étant vi	pu	» e_2	à	$-\infty$,

et ce Tableau montre que, si pu est réel, u est nécessairement, à des périodes et au signe près, de l'une des quatre formes (1), (2), (3), (4).

Cela posé, considérons la fonction $\sqrt{\frac{pu-e_3}{pu-e_\gamma}}$, où le signe du radical est tel, d'après (15), que la fonction soit égale à $+1$ pour $u = 0$. Soit $X + Yi$ la valeur de cette fonction pour un point u, *intérieur* au rectangle de centre $u = 0$, construit sur les périodes 2Ω, $2\Omega' i$: je dis que X ne peut être nul. Car pour $X = 0$, pu serait réel et compris entre e_β et e_γ, c'est-à-dire entre e_2 et e_3 ou entre e_1 et e_3, et, d'après le Tableau précédent, u serait *sur* un des côtés du rectangle. Donc X ne s'annule pas dans le rectangle, et, comme il est égal à $+1$ pour $u = 0$, il reste positif.

Posons $z = e^{\pi i \frac{u}{\omega_\alpha}}$; cette équation devient

$$(17) \qquad \frac{\sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n q^{n^2} z^n}{\sum_{-\infty}^{+\infty} q^{n^2} z^n} = \text{M}.$$

On peut la résoudre en z par approximation, en s'appuyant sur ce qu'elle admet deux racines z, inverses l'une de l'autre, de module compris entre q et $\frac{1}{q}$, à savoir les quantités $e^{\pm \pi i \frac{u_0}{\omega_\alpha}}$ définies plus haut.

Écrivons (17) sous la forme

$$\frac{1 - q\left(z + \frac{1}{z}\right) + q^4\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) - q^9\left(z^3 + \frac{1}{z^3}\right) - \ldots}{1 + q\left(z + \frac{1}{z}\right) + q^4\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) + q^9\left(z^3 + \frac{1}{z^3}\right) + \ldots} = \text{M};$$

nous pouvons, comme première approximation, négliger les termes en q^4, q^9, ...; car, pour chacune des racines z_0 définies tout à l'heure, $\text{mod}\, z_0$ étant compris entre q et $\frac{1}{q}$, on a évidemment

$$\text{mod}\left(z_0 + \frac{1}{z_0}\right) < \text{mod}\, z_0 + \text{mod}\, \frac{1}{z_0} < \frac{2}{q},$$

$$\text{mod}\left(z_0^2 + \frac{1}{z_0^2}\right) < \text{mod}\, z_0^2 + \text{mod}\, \frac{1}{z_0^2} < \frac{2}{q^2},$$

et ainsi de suite. Donc, les termes en q^4 ont leur module inférieur à $q^4 \frac{2}{q^2}$ ou $2q^2$, quantité très petite, puisque q ne dépasse pas $\frac{1}{20}$, et ainsi de suite.

On a donc, pour déterminer une valeur approchée de z, l'équation

$$\text{M} = \frac{1 - q\left(z + \frac{1}{z}\right)}{1 + q\left(z + \frac{1}{z}\right)} \qquad \text{ou} \qquad \left(z + \frac{1}{z}\right) = \frac{1}{q}\,\frac{1 - \text{M}}{1 + \text{M}},$$

qui a pour racines deux quantités de la forme z_1 et $\frac{1}{z_1}$.

Une seconde approximation permettra d'avoir une valeur plus exacte de z, et ainsi de suite.

Connaissant z, on aura u par la formule $z = e^{\pi i \frac{u}{\omega_\alpha}}$, d'où

$$\pi i \frac{u}{\omega_\alpha} = \log z + 2m\pi i \qquad \text{ou} \qquad u = \frac{\omega_\alpha}{\pi i} \log z + 2m\omega_\alpha,$$

et l'on choisira l'entier m de manière que u soit compris dans le rectangle considéré plus haut.

La seconde solution, $\frac{1}{z}$, donnerait

$$u = -\frac{\omega_\alpha}{\pi i} \log z + 2m\omega_\alpha,$$

c'est-à-dire la même valeur de u, au signe près et à une période près.

TROISIÈME PARTIE.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

CHAPITRE I.

ÉQUATIONS DU PREMIER ORDRE.

I. — DÉFINITIONS ET GÉNÉRALITÉS.

239. Ordre. — On nomme *équation différentielle d'ordre n* une relation entre une variable, une fonction de cette variable et les dérivées des divers ordres de cette fonction jusqu'à l'ordre n, inclusivement. Si x est la variable et y la fonction, l'équation différentielle est de la forme

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0.$$

On peut se rendre compte que la solution, ou *intégrale* générale y, d'une équation différentielle d'ordre n, dépend de n constantes arbitraires.

Résolvons en effet l'équation par rapport à $\frac{d^ny}{dx^n}$:

$$\frac{d^ny}{dx^n} = \varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right).$$

Imaginons que nous nous donnions *arbitrairement* les valeurs de y, $\frac{dy}{dx}$, $\ldots$, $\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$ pour une valeur x_0, de x; l'équation précédente nous fait connaître, pour $x = x_0$, la valeur de $\frac{d^ny}{dx^n}$; et, en

dérivant cette équation par rapport à x, nous connaîtrons successivement les valeurs de toutes les dérivées de y, pour $x = x_0$. Appliquons alors à y le développement de Taylor, nous obtiendrons l'expression de cette fonction sous la forme

$$y = y_0 + (x - x_0)\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 + \frac{(x-x_0)^2}{1.2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 + \cdots$$

Or, le second membre renferme n constantes *arbitraires*, à savoir y_0, $\left(\frac{dy}{dx}\right)_0, \ldots, \left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)_0$, et, par suite, la fonction la plus générale y, qui satisfait à une équation différentielle d'ordre n, doit renfermer n constantes arbitraires. Il resterait, il est vrai, pour compléter ce raisonnement, à établir la convergence de la série considérée plus haut; nous indiquerons ultérieurement les résultats obtenus par Cauchy sur cette question.

240. Équations du premier ordre. — D'après cela, dans le cas d'une équation du premier ordre :

$$(1) \qquad f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

l'intégrale ou solution générale, y, renferme une constante arbitraire C; elle est donc donnée par une relation de la forme

$$(2) \qquad \Phi(x, y, C) = 0.$$

Inversement, l'intégrale générale, c'est-à-dire la relation (2), étant connue, on peut retrouver, comme il suit, l'équation différentielle initiale. Dérivons l'équation (2) par rapport à la variable indépendante x; il vient :

$$(3) \qquad \Phi'_x + \frac{dy}{dx}\Phi'_y = 0;$$

éliminons ensuite C entre (2) et (3); nous obtenons une relation

$$(4) \qquad F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

que je dis être identique à la proposée (1).

En effet, d'après l'hypothèse et d'après la formation de (4), les équations (1) et (4) sont vérifiées par la fonction y, de x, définie

par la relation (2), quelle que soit la constante C; si elles n'étaient pas identiques, en éliminant entre elles $\frac{dy}{dx}$, on obtiendrait une relation $\varphi(x, y) = 0$, vérifiée encore par la même fonction y. Mais en choisissant convenablement la constante C, dans (2), on peut faire en sorte que y, pour une valeur donnée de x, ait une valeur arbitraire : il ne peut donc exister de relation de la forme $\varphi(x, y) = 0$ entre x et y, et dès lors les équations (1) et (4) sont les mêmes.

241. Solutions générale et singulière. — L'équation différentielle proposée (1) a-t-elle d'autres solutions que la fonction y définie par (2) : $\Phi(x, y, C) = 0$?

La proposée étant, comme on vient de le voir, le résultat de l'élimination de C entre les deux équations

$$(2) \qquad \Phi(x, y, C) = 0,$$

$$(3) \qquad \Phi'_x + \frac{dy}{dx}\Phi'_y = 0,$$

peut être remplacée par le système de ces deux équations, où les deux inconnues sont y et C : en d'autres termes, intégrer la proposée (1) revient à trouver *deux fonctions* y et C, *de la variable* x, vérifiant (2) et (3). Or, si l'on dérive (2) par rapport à x, on a :

$$(5) \qquad \Phi'_x + \frac{dy}{dx}\Phi'_y + \frac{dC}{dx}\Phi'_C = 0,$$

équation qui, en vertu de (3), se réduit à

$$(6) \qquad \frac{dC}{dx}\Phi'_C = 0,$$

et le système des équations (2) et (6) est évidemment équivalent au système (2) et (3), dont on l'a déduit : car (2) entraîne (5), qui, si l'on tient compte de (6), donne (3). On a donc finalement à trouver deux fonctions y et C, de x, vérifiant (2) et (6).

Or, on peut satisfaire à (6) de deux manières :

1° En posant $\frac{dC}{dx} = 0$, d'où $C = \text{const.}$, ce qui donne l'intégrale générale $\Phi(x, y, \text{const.}) = 0$.

2° En posant $\Phi'_C = 0$: les inconnues y et C sont alors définies par les deux équations

$$(7) \qquad \Phi(x, y, C) = 0, \qquad \Phi'_C = 0;$$

et l'élimination de C conduit à une relation $\psi(x, y) = 0$, qui donne y en fonction de x. Cette solution y ne renferme pas de constante arbitraire; elle se nomme la *solution singulière* de l'équation différentielle proposée. La solution générale et la solution singulière sont, d'après ce qui précède, les seules solutions de la proposée.

242. Interprétation géométrique. — Ces résultats s'interprètent géométriquement.

Si x et y sont les coordonnées d'un point du plan, chaque intégrale ou solution dite *particulière*,

$$\Phi(x, y, C) = 0,$$

où l'on donne à la constante C une valeur particulière, représente une courbe : l'intégrale ou solution générale est représentée par l'ensemble de ces courbes, dites *courbes intégrales;* la solution singulière, définie par les équations $\Phi(x, y, C) = 0$, $\Phi'_C = 0$, est l'enveloppe des courbes intégrales (Tome I, n° 356).

Il est évident *a priori* que l'enveloppe de ces courbes doit être une solution de l'équation différentielle. En effet, en un point quelconque x, y de l'enveloppe, celle-ci touche une des enveloppées, de sorte que, en ce point, x, y et $\frac{dy}{dx}$ sont les mêmes pour les deux courbes : comme, en tout point de l'enveloppée, l'équation proposée $f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$ est vérifiée, la proposition est établie.

243. Existence de la solution singulière. — On peut obtenir la solution singulière de l'équation différentielle sans intégrer celle-ci, et ce procédé va mettre en évidence un fait remarquable : c'est qu'une équation différentielle n'admet pas, en général, de solution singulière, ou, sous une autre forme, que les courbes intégrales n'ont en général pas d'enveloppe.

Pour fixer les idées, supposons que l'équation différentielle

proposée

$$(1) \qquad f(x, y, y') = 0$$

soit algébrique, c'est-à-dire que f soit un polynome entier en x, y, y'.

Cette équation donne, pour chaque point x, y du plan, les coefficients angulaires y' des tangentes aux courbes intégrales qui passent par ce point : si (x, y) est sur l'enveloppe des courbes intégrales, deux de celles-ci, confondues, passent par (x, y), de sorte que l'équation (1) a, en y', une racine double. On obtient donc l'équation de l'enveloppe, *si elle existe,* en écrivant que l'équation (1) a une racine double en y', c'est-à-dire en éliminant y' entre les relations

$$f(x, y, y') = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y'} = 0.$$

L'équation ainsi obtenue, $\psi_1(x, y) = 0$, convient à tous les points de l'enveloppe; mais elle convient aussi à d'autres points, par exemple aux points de rebroussement des courbes intégrales : car, en un de ceux-ci, l'équation $f(x, y, y') = 0$ a évidemment deux racines y' égales. Elle convient de même au lieu des points de contact de deux courbes intégrales, non infiniment voisines entre elles.

Montrons maintenant qu'il n'y a généralement pas d'enveloppe.

Reprenons le lieu $\psi_1(x, y) = 0$ obtenu par l'élimination de m entre les équations

$$(8) \qquad f(x, y, m) = 0. \qquad \frac{\partial f}{\partial m} = 0,$$

où l'on a écrit m à la place de y'. Pour qu'il soit l'enveloppe des courbes intégrales, il faut et il suffit que le coefficient angulaire, $\frac{dy}{dx}$, de sa tangente en tout point x, y soit égal à la racine *double* m, de l'équation $f(x, y, m) = 0$: car la tangente en un point de l'enveloppe est la même que celle des deux enveloppées confondues qui passent par ce point.

Or, en dérivant la première des équations (8) par rapport à la variable indépendante x, on trouve

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial m}\frac{dm}{dx} = 0.$$

et si l'on tient compte de $\frac{\partial f}{\partial m} = 0$, il reste $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0$ [1].

Écrivons que la valeur de $\frac{dy}{dx}$ ainsi obtenue est égale à m; nous avons la condition

$$\frac{\partial f}{\partial x} + m\frac{\partial f}{\partial y} = 0. \tag{9}$$

C'est là une nouvelle équation qui doit être vérifiée, en même temps que les équations (8), par tout point de l'enveloppe; en éliminant m entre (9) et la première relation (8), on obtient une équation $\psi_2(x, y) = 0$, qui, en général, ne définit pas la même courbe que $\psi_1(x, y) = 0$. L'enveloppe n'existera, d'après cela, que si ψ_1 et ψ_2 ont un facteur commun ψ, et son équation sera alors $\psi = 0$. Dans les autres cas, la courbe $\psi_1 = 0$ sera un lieu étranger (en général le lieu des points de rebroussement des courbes intégrales) et ne fournira pas une solution de l'équation différentielle.

Ainsi, en laissant de côté le cas exceptionnel signalé en note, la solution singulière n'existe que si les trois relations

$$f(x, y, m) = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial m} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial x} + m\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

donnent, par élimination de m, deux équations en x et y ayant un facteur commun : ce facteur égalé à zéro est la solution singulière, enveloppe des courbes intégrales.

244. Exemple. — Soit l'équation différentielle

$$f(x, y, y') = 4y'^3 - 6y'^2 + 9(y - x) = 0.$$

La solution singulière, si elle existe, s'obtiendra par l'élimination de m entre les équations

$$4m^3 - 6m^2 + 9(y - x) = 0, \qquad m(m - 1) = 0.$$

---

[1] On suppose essentiellement que cette équation détermine $\frac{dy}{dx}$ en chaque point du lieu $\psi_1 = 0$, c'est-à-dire que $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ ne s'annulent pas simultanément pour toutes les valeurs de x, y, m qui vérifient les équations (8).

On trouve ainsi

$$(y-x)\left(y-x-\frac{2}{9}\right)=0,$$

d'où les deux solutions $y=x$, $y=x+\frac{2}{9}$.

Pour que l'une ou l'autre soit la solution singulière, il faut qu'elle annule le résultat de l'élimination de m entre $f=0$ et $\frac{\partial f}{\partial x}+m\frac{\partial f}{\partial y}=0$, c'est-à-dire entre $4m^3-6m^2+9(y-x)=0$ et $m-1=0$, résultat qui est :

$$-2+9(y-x)=0.$$

La solution singulière est donc $y=x+\frac{2}{9}$; la courbe $y-x=0$, au contraire, ne donne pas une solution de l'équation proposée : car $y=x$, $y'=1$ ne vérifient pas celle-ci. La courbe $y=x$ est le lieu des points de rebroussement des courbes intégrales.

On vérifie ces résultats en cherchant l'intégrale générale qui est ici [1], c désignant la constante arbitraire,

$$(10)\qquad 2(x-c)^3+3(y-c)^2=0.$$

L'enveloppe des courbes (10) s'obtient aisément, c'est la droite $y-x=\frac{2}{9}$; le point $x=c$, $y=c$ étant manifestement un point de rebroussement de (10), la droite $y=x$ est bien le lieu des rebroussements des courbes intégrales.

245. Remarque. — Supposons, en désignant par C et C_1 des constantes arbitraires, que l'on ait obtenu sous deux formes différentes,

$$\varphi(x,y)=C,\qquad \varphi_1(x,y)=C_1,$$

la solution générale d'une équation différentielle du premier ordre entre x et y : je dis que $\varphi_1(x,y)$, considérée comme fonction de deux variables indépendantes, x et y, est fonction de $\varphi(x,y)$. En effet, si l'on prend comme variables x et $\varphi(x,y)$ à la place de x et y, la fonction φ_1 devient une fonction de x et de $\varphi(x,y)$, à savoir $\varphi_1(x,y)=f(x,\varphi)$.

---

[1] L'équation différentielle considérée est d'un type intégrable, celui de Lagrange (*voir* n° 262).

Mais en vertu de l'hypothèse, lorsque y vérifie l'équation différentielle proposée, φ est constant et réciproquement; et il en est de même de φ_1 : en d'autres termes, φ_1 est constant lorsque φ est constant. Or, pour que $\varphi_1 = f(x, \varphi)$ reste constant en même temps que φ, il faut et il suffit évidemment que f ne dépende que de φ, c'est-à-dire soit de la forme $f(\varphi)$. On a donc bien

$$\varphi_1 = f(\varphi). \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

246. Applications. — Voici deux applications de cette remarque :

1° Soit l'équation différentielle du premier ordre

$$(11) \qquad \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 0.$$

On l'intègre immédiatement en remontant aux primitives des deux différentielles :

$$\text{arc sin}\, x + \text{arc sin}\, y = C_1.$$

On peut obtenir l'intégrale sous une autre forme, algébrique en x et y, en écrivant :

$$dx\sqrt{1-y^2} + dy\sqrt{1-x^2} = 0;$$

d'où, en intégrant chaque terme par parties,

$$x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} + \int\left(\frac{xy\,dy}{\sqrt{1-y^2}} + \frac{xy\,dx}{\sqrt{1-x^2}}\right) = C.$$

La quantité sous le signe $\int$ est nulle en vertu de l'équation différentielle (11) elle-même; il reste donc :

$$x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = C,$$

seconde forme de la solution générale de (11). Donc, en vertu de la Remarque du numéro précédent, on a :

$$\text{arc sin}\, x + \text{arc sin}\, y = f\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right).$$

Pour déterminer la fonction inconnue f, faisons $y = 0$: le premier membre est arc sin x, le second $f(x)$; donc f est un arc sin, et il vient :

$$\text{arc sin}\, x + \text{arc sin}\, y = \text{arc sin}\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right);$$

ce qu'on peut écrire, en posant $\arcsin x = u$, $\arcsin y = v$,

$$u + v = \arcsin(\sin u \cos v + \sin v \cos u);$$

c'est la formule d'addition bien connue de la fonction sinus.

2° On trouverait de même la formule d'addition du logarithme, en intégrant sous deux formes l'équation

$$\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = 0 \qquad \text{ou} \qquad x\,dy + y\,dx = 0.$$

Ces deux relations donnent respectivement :

$$\log x + \log y = C_1 \qquad \text{et} \qquad xy = C,$$

d'où l'on conclut :

$$\log x + \log y = f(xy).$$

Déterminons f en faisant $y = 1$; il vient $f(x) = \log x$, et finalement

$$\log xy = \log x + \log y.$$

II. — ÉQUATIONS DU PREMIER ORDRE QU'ON SAIT INTÉGRER.

247. On ne sait résoudre ou *intégrer* (¹) qu'un petit nombre de types d'équations du premier ordre : on va les indiquer successivement.

248. 1° Équations à variables séparées. — Elles sont du type

$$XY + X_1 Y_1 \frac{dy}{dx} = 0,$$

où X, X_1 sont fonctions de x seul; Y, Y_1, fonctions de y seul.

On peut écrire :

$$\frac{X}{X_1}\,dx + \frac{Y_1}{Y}\,dy = 0,$$

(¹) Une équation différentielle sera regardée comme intégrée quand on aura ramené le calcul de sa solution générale à celui d'une ou de plusieurs quadratures, même si ces quadratures ne peuvent s'effectuer à l'aide des fonctions élémentaires.

d'où, en remontant aux primitives des deux différentielles,

$$\int \frac{X}{X_1}\,dx + \int \frac{Y_1}{Y}\,dy = \text{const.}$$

On a ainsi une relation entre x et y, renfermant une constante arbitraire; c'est l'intégrale générale.

Exemple. — Désignons par X, X_1, Y, Y_1 des polynomes entiers, respectivement en x et y, et considérons l'équation

$$XY + X_1 Y_1 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$$

qu'on ramène au type précédent, en la résolvant par rapport à $\frac{dy}{dx}$.

Cherchons la solution singulière. Pour l'obtenir, il faut exprimer que l'équation

$$XY + X_1 Y_1 m^2 = 0$$

a une racine double en m, ce qui donne $XYX_1Y_1 = 0$.

Or, $Y_1 = 0$ donne des droites, $y = \alpha$, parallèles à l'axe des x; d'ailleurs pour $y = \alpha$, $\frac{dy}{dx}$ est nul ainsi que Y_1, et l'équation proposée n'est pas vérifiée. Au contraire, si $y = \alpha$ est une droite du système $Y = 0$, l'équation est satisfaite. De même, en écrivant la proposée

$$XY\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + X_1 Y_1 = 0,$$

on reconnaît qu'elle n'est pas vérifiée pour les droites $X = 0$, et qu'elle l'est pour les droites $X_1 = 0$.

La solution singulière, enveloppe des courbes intégrales, ne peut donc être cherchée que parmi les droites $Y = 0$ et $X_1 = 0$: on vérifierait aisément, par la méthode générale du n° **243**, que ces droites constituent réellement l'enveloppe considérée.

249. 2° Équations homogènes. — Ce sont celles du type

$$\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Pour les intégrer, changeons d'inconnue en posant $y = ux$, ce

qui donne :

$$dy = u\,dx + x\,du.$$

L'équation proposée devient ainsi :

$$u + x\frac{du}{dx} = \varphi(u).$$

On peut séparer les variables en écrivant :

$$\frac{du}{\varphi(u) - u} = \frac{dx}{x},$$

d'où

$$\int \frac{du}{\varphi(u) - u} = \log x + \text{const.},$$

c'est-à-dire

$$\Phi(u) = \log x + \text{const.}$$

ou

$$\log x = \Phi\left(\frac{y}{x}\right) + \text{const.}$$

C'est la solution générale.

250. **Remarque.** — Elle peut s'écrire :

$$(12) \qquad x = Ce^{\Phi\left(\frac{y}{x}\right)} \quad \text{ou} \quad x = C\psi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Cette équation représente évidemment des courbes homothétiques entre elles par rapport à l'origine : c'est là une propriété intéressante des courbes intégrales d'une équation homogène du premier ordre. Réciproquement, toute famille de courbes homothétiques par rapport à l'origine satisfait à une équation homogène, car, en résolvant l'équation (12) par rapport à $\frac{1}{C}$ et dérivant ensuite par rapport à la variable indépendante x, on obtient :

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x}\psi\left(\frac{y}{x}\right)\right] = 0;$$

c'est-à-dire, tous calculs faits,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \frac{\psi\left(\frac{y}{x}\right)}{\psi'\left(\frac{y}{x}\right)},$$

équation dont le second membre est bien une fonction de $\frac{y}{x}$ (¹).

C. Q. F. D.

251. 3° Équations réductibles aux équations homogènes. — Ce sont celles de la forme

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{ax+by+c}{a'x+b'y+c'}\right),$$

$a, b, \ldots, c'$ désignant des constantes.

1° Si $ab'-ba'$ n'est pas nul, on posera, en changeant à la fois la variable et la fonction,

$$(2) \qquad ax+by+c=\eta, \qquad a'x+b'y+c'=\xi,$$

d'où

$$a\,dx+b\,dy=d\eta, \qquad a'\,dx+b'\,dy=d\xi.$$

On tirera de là linéairement, puisque $ab'-ba'$ n'est pas nul,

$$dx = \mathrm{A}\,d\xi+\mathrm{B}\,d\eta, \qquad dy=\mathrm{A}'\,d\xi+\mathrm{B}'\,d\eta,$$

A, B, A′, B′ étant des constantes, et l'équation différentielle proposée deviendra

$$\frac{\mathrm{A}'\,d\xi+\mathrm{B}'\,d\eta}{\mathrm{A}\,d\xi+\mathrm{B}\,d\eta}=\varphi\left(\frac{\eta}{\xi}\right);$$

d'où

$$\frac{d\eta}{d\xi}=\psi\left(\frac{\eta}{\xi}\right),$$

équation homogène, dans l'intégrale de laquelle on remplacera η et ξ par leurs valeurs (2) pour avoir l'intégrale générale de (1).

Il est clair que les courbes intégrales de la proposée (1) sont homothétiques entre elles, par rapport au point de rencontre des deux droites $ax+by+c=0$; $a'x+b'y+c'=0$.

2° Si $ab'-ba'=0$, on posera, en changeant simplement de

(¹) Ce dernier point était évident géométriquement : car les tangentes aux courbes homothétiques considérées, en des points situés sur un même rayon vecteur issu de l'origine, sont parallèles; c'est-à-dire que, pour ces courbes, $\frac{dy}{dx}$ ne dépend que de $\frac{y}{x}$.

fonction inconnue et en conservant la variable x,

(3) $$ax + by + c = \eta,$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{b}\left(\frac{d\eta}{dx} - a\right),$$

et

$$a'x + b'y + c' = \frac{a'}{a}(\eta - c) + c'.$$

Portant ces valeurs dans l'équation différentielle proposée, on obtient :

$$\frac{d\eta}{dx} - a = b\,\varphi\left(\frac{\eta}{\frac{a'}{a}(\eta - c) + c'}\right) = \psi(\eta),$$

d'où

$$dx = \frac{d\eta}{a + \psi(\eta)}.$$

Les variables étant séparées, on peut intégrer :

(4) $$x = \int \frac{d\eta}{a + \psi(\eta)} + \text{const.} = \Phi(\eta) + \text{const.}$$

Remplaçant ensuite, dans le second membre, η par sa valeur (3), on aura l'intégrale générale de la proposée.

Dans le cas actuel, les deux droites

$$ax + by + c = 0, \qquad a'x + b'y + c' = 0$$

sont parallèles; les courbes intégrales de (1) sont encore homothétiques entre elles par rapport au point de concours des deux droites, c'est-à-dire sont les positions d'une même courbe qui se déplacerait parallèlement à la droite $ax + by = 0$. On le vérifie de suite sur l'équation (4).

252. Exemple. — Soit l'équation $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = ax + by + c$; en l'écrivant

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{ax + by + c},$$

on la fait rentrer dans le type (1) avec $a' = b' = 0$, $c' = 1$.

Posons donc, pour intégrer, puisque $ab' - ba'$ est nul,

$$ax + by + c = \eta,$$

la proposée devient

$$\frac{1}{b}\left(\frac{d\eta}{dx} - a\right) = \sqrt{\eta};$$

ou

$$\frac{d\eta}{b\sqrt{\eta} + a} = dx.$$

Pour effectuer la quadrature en η, on posera $\eta = v^2$, d'où

$$\frac{2v\,dv}{bv + a} = dx;$$

c'est-à-dire

$$\frac{2dv}{b}\left(1 - \frac{a}{bv + a}\right) = dx,$$

et, en remontant aux primitives,

$$\frac{2}{b}\left[v - \frac{a}{b}\log(bv + a)\right] = x + C.$$

Il ne reste plus qu'à remplacer v par $\sqrt{\eta}$, c'est-à-dire par

$$\sqrt{ax + by + c},$$

pour avoir l'intégrale générale de la proposée.

253. 4° Équations linéaires. — On nomme ainsi celles qui sont linéaires par rapport à y et $\frac{dy}{dx}$, et de la forme

$$(5) \qquad \frac{dy}{dx} + Py + Q = 0,$$

P et Q étant des fonctions de x.

Pour intégrer l'équation (5), posons $y = uv$, u et v étant deux nouvelles inconnues, dont nous aurons le droit de particulariser l'une; la proposée (5) devient :

$$(6) \qquad u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} + Puv + Q = 0.$$

Annulons le coefficient de u, ce qui particularisera v [1], on a :

$$\frac{dv}{dx} + Pv = 0,$$

---

[1] Cette méthode, qui semble artificielle, n'est, comme on le verra plus tard, qu'un cas particulier d'une méthode générale, applicable à toute une classe d'équations différentielles (n° 348).

d'où

$$\frac{dv}{v} + P\,dx = 0$$

et, en intégrant,

$$\log v = \log C - \int P\,dx,$$

(7) $$v = Ce^{-\int P\,dx}.$$

Il reste, dans l'équation (6), les termes qui ne contiennent pas u en facteur, et qui donnent

$$v\frac{du}{dx} + Q = 0,$$

d'où

$$du = -\frac{Q}{v}\,dx.$$

Comme v est une fonction connue de x, d'après (7), les variables sont séparées; on peut donc intégrer et l'on a :

$$u = -\int \frac{Q}{v}\,dx + C' = -\int \frac{Q}{C}\,e^{\int P\,dx}\,dx + C'$$

d'où, pour y,

(8) $$y = uv = -e^{-\int P\,dx}\left(\int Qe^{\int P\,dx}\,dx\right) + C''e^{-\int P\,dx} \qquad (C'' = CC').$$

La constante C a disparu; il reste la constante arbitraire C″. On pourra donc, dans les calculs, ne pas introduire C, en le faisant dès le début égal à 1. Ceci est d'ailleurs évident, car on n'a besoin que d'un seul facteur v, propre à simplifier l'équation proposée.

254. Exemple. — Soit l'équation linéaire :

$$\frac{dy}{dx} - y - x^2 = 0.$$

Posons $y = uv$; il vient

$$u\left(\frac{dv}{dx} - v\right) + v\frac{du}{dx} - x^2 = 0.$$

Annulant le coefficient de u, on a :

$$\frac{dv}{dx} - v = 0$$

d'où

$$\frac{dv}{v} = dx, \qquad \log v = x, \qquad v = e^x;$$

et il reste

$$v\frac{du}{dx} - x^2 = 0,$$

d'où

$$du = x^2 e^{-x} dx, \qquad u = \int x^2 e^{-x} dx + C.$$

Donc enfin, l'intégrale cherchée est :

$$y = uv = e^x \int x^2 e^{-x} dx + Ce^x.$$

La quadrature s'effectue aisément; intégrant par parties, on a :

$$\int \underbrace{x^2}_{u} \underbrace{e^{-x} dx}_{dv} = - x^2 e^{-x} + 2 \int x e^{-x} dx$$

$$= - x^2 e^{-x} + 2 \left[- x e^{-x} + \int e^{-x} dx \right]$$

$$= [- x^2 - 2x - 2] e^{-x}.$$

d'où finalement

$$y = -(x^2 + 2x + 2) + Ce^x.$$

255. Remarque I. — La formule (8) montre que l'intégrale générale d'une équation linéaire s'obtient au moyen de deux quadratures. Si l'on connaît *une* solution particulière y_1, une seule quadrature suffira pour calculer l'intégrale générale : en effet, y étant la solution générale inconnue, les équations

$$\frac{dy}{dx} + Py + Q = 0, \qquad \frac{dy_1}{dx} + Py_1 + Q = 0$$

donnent, par soustraction,

$$\frac{d}{dx}(y - y_1) + P(y - y_1) = 0;$$

c'est-à-dire

$$\frac{d(y - y_1)}{y - y_1} = - P\,dx,$$

équation à variables séparées, d'où l'on tire :

$$y - y_1 = Ce^{-\int P dx},$$

C désignant une constante arbitraire. Cette formule établit la proposition.

De même, si l'on connaît *deux* solutions, y_1 et y_2, de l'équation linéaire, on aura :

$$y = y_1 + Ce^{-\int P\,dx}; \qquad y_2 = y_1 + C_2 e^{-\int P\,dx},$$

C_2 étant une constante déterminée; et l'on en déduit

$$y = y_1 + \frac{C}{C_2}(y_2 - y_1) = y_1 + C'(y_2 - y_1), \qquad (C' = \text{const. arbitraire}),$$

de sorte que la solution générale peut s'écrire immédiatement, *sans aucun signe de quadrature*.

256. Remarque II. — D'après la formule (8), en désignant par λ la constante arbitraire, la solution générale de l'équation linéaire est de la forme

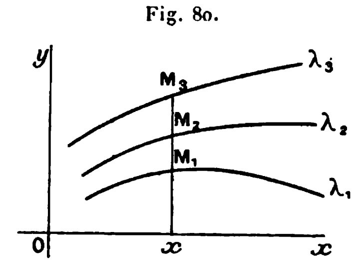
$$y = A + B\lambda,$$

A et B étant des fonctions de x. Soient y_1, y_2, y_3 trois solutions particulières, correspondant aux valeurs λ_1, λ_2, λ_3 de la constante; on a, *pour une même valeur de la variable* x,

$$\frac{y_3 - y_2}{y_1 - y_2} = \frac{(A + B\lambda_3) - (A + B\lambda_2)}{(A + B\lambda_1) - (A + B\lambda_2)} = \frac{\lambda_3 - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

Le rapport qui figure au premier membre est donc indépendant

Fig. 80.



de x. C'est là une propriété géométrique des courbes intégrales de l'équation linéaire : considérons en effet les trois courbes intégrales qui correspondent aux valeurs λ_1, λ_2, λ_3 de la constante λ; une sécante mobile, parallèle à Oy (*fig.* 80), les coupe en des

points M_1, M_2, M_3, et l'on a

$$\frac{y_3-y_2}{y_1-y_2}=\frac{M_2M_3}{M_2M_1}=\text{const.};$$

c'est-à-dire que trois courbes intégrales fixes déterminent, sur une parallèle mobile à Oy, des segments proportionnels.

257. 5° Équations de Bernoulli. — Leur type est

$$\frac{dy}{dx}+Py+Qy^n=0,$$

P et Q étant des fonctions de x, et n une constante. Pour intégrer, divisons par y^n :

$$\frac{1}{y^n}\frac{dy}{dx}+P\frac{1}{y^{n-1}}+Q=0,$$

et prenons pour inconnue $\frac{1}{y^{n-1}}$, en posant

$$\frac{1}{y^{n-1}}=z;\qquad \text{d'où}\qquad \frac{dy}{y^n}=-\frac{1}{n-1}dz.$$

L'équation proposée devient alors :

$$-\frac{1}{n-1}\frac{dz}{dx}+Pz+Q=0,$$

équation linéaire en z et $\frac{dz}{dx}$, que l'on sait intégrer (n° 253).

258. 6° Équations de Riccati. — Ce sont les équations de la forme :

$$\frac{dy}{dx}+R+Py+Qy^2=0,$$

R, P, Q étant des fonctions de x. On sait intégrer une telle équation *quand on en connaît une solution particulière*. Soit en effet y_1 cette solution, posons

$$y=y_1+z;$$

la proposée devient :

$$\frac{dz}{dx}+\left(\frac{dy_1}{dx}+R+Py_1+Qy_1^2\right)+Pz+2Qy_1z+Qz^2=0.$$

Or, en vertu de l'hypothèse, on a

$$\frac{dy_1}{dx} + R + Py_1 + Qy_1^2 = 0;$$

et il reste

$$\frac{dz}{dx} + z(P + 2Qy_1) + Qz^2 = 0,$$

équation de Bernoulli, qu'on ramène à une équation linéaire en posant $z = \frac{1}{u}$.

Pour intégrer l'équation de Riccati, on y posera donc tout de suite

$$y = y_1 + \frac{1}{u},$$

et l'on obtiendra une équation linéaire en u, qu'on saura intégrer.

D'après cela, l'équation de Riccati, si l'on en connaît *une* solution, y_1, s'intègre au moyen de *deux* quadratures (n° 255). Si l'on en connaît *deux* solutions, y_1 et y_2, on connaîtra une solution particulière de l'équation linéaire en u par la formule

$$y_2 - y_1 = \frac{1}{u} \qquad \text{ou} \qquad u = \frac{1}{y_2 - y_1},$$

de sorte que l'intégrale générale de l'équation en u, et, par suite, celle de l'équation de Riccati, s'obtiendra au moyen *d'une seule* quadrature (n° 255). Enfin, si l'on connaît trois solutions particulières de l'équation de Riccati, on connaîtra deux solutions particulières de l'équation linéaire en u, et l'intégrale générale s'obtiendra immédiatement sans *aucun* signe de quadrature.

259. Remarque. — D'après le numéro précédent, la fonction u, solution d'une équation linéaire, est de la forme

$$u = A + B\lambda,$$

λ étant la constante arbitraire, et A, B des fonctions de x. On a dès lors, pour solution, y, de l'équation de Riccati, la forme :

$$(9) \qquad y = y_1 + \frac{1}{u} = \frac{y_1(A + B\lambda) + 1}{A + B\lambda} = \frac{M + N\lambda}{A + B\lambda};$$

M, N, A, B étant des fonctions de x. La constante entre donc

linéairement au numérateur et au dénominateur de y. De là une conséquence intéressante.

Considérons quatre solutions particulières de l'équation de Riccati, correspondant aux valeurs λ_0, λ_1, λ_2, λ_3 de la constante; le *rapport anharmonique* de ces solutions, y_0, y_1, y_2, y_3, *pour une même valeur de* x, est, par définition, l'expression

$$\frac{y_3-y_0}{y_1-y_0} : \frac{y_3-y_2}{y_1-y_2};$$

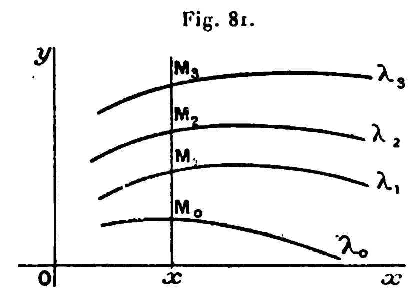
si l'on y remplace les y par leurs valeurs (9), on trouve, par un calcul facile et d'ailleurs bien connu, que ce rapport anharmonique devient

$$\frac{\lambda_3-\lambda_0}{\lambda_1-\lambda_0} : \frac{\lambda_3-\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2},$$

les M, N, A, B ayant disparu. Il est donc indépendant de x, et par suite :

Le rapport harmonique de quatre solutions de l'équation de Riccati, pour une même valeur de la variable, est constant;

Fig. 81.



il est égal à celui des quatre valeurs de la constante arbitraire qui correspondent à ces solutions.

Il résulte de là que si y_1, y_2, y_3 sont trois solutions particulières de l'équation de Riccati, et y une solution quelconque, on aura

$$\frac{y_3-y}{y_1-y} : \frac{y_3-y_2}{y_1-y_2} = C,$$

relation qui donne immédiatement, en fonction de x et d'une constante arbitraire, l'intégrale générale y, quand on connaît

trois solutions particulières. Ce résultat est d'accord avec ce qui a été dit au n° 258 sur l'intégration de l'équation de Riccati, quand on connaît trois solutions de celle-ci.

Géométriquement, si l'on considère, dans le plan, les quatre courbes intégrales (en x, y) qui correspondent aux quatre solutions y_0, y_1, y_2, y_3, le rapport anharmonique des quatre points où ces courbes sont coupées par une sécante mobile, parallèle à Oy, est constant, c'est-à-dire que l'on a (*fig.* 81)

$$\frac{M_3 M_0}{M_1 M_0} : \frac{M_3 M_2}{M_1 M_2} = \text{const.}$$

260. 7° Équations de Lagrange. — Elles sont linéaires par rapport à x et y, et de la forme

$$y + x\varphi\left(\frac{dy}{dx}\right) + \psi\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0.$$

Pour intégrer, posons

$$\frac{dy}{dx} = p,$$

ce qui donne la relation

(10) $$y + x\varphi(p) + \psi(p) = 0.$$

Dérivons-la par rapport à x; il vient

(10 *bis*) $$p + \varphi(p) + [x\varphi'(p) + \psi'(p)]\frac{dp}{dx} = 0.$$

Cette équation, si l'on y considère x comme l'inconnue et p comme la variable, est une équation linéaire. Elle s'écrit en effet

$$\frac{dx}{dp}[p + \varphi(p)] + x\varphi'(p) + \psi'(p) = 0.$$

On sait donc l'intégrer, ce qui donne x en fonction de p, ou p en fonction de x : remplaçant p par cette valeur dans l'équation primitive (10), on aura la relation cherchée entre y et x. On pourra aussi remplacer, dans (10), x par sa valeur en fonction de p, et résoudre par rapport à y; x et y seront ainsi exprimés en fonction d'une même variable auxiliaire, p, ce qui définit la courbe intégrale.

261. Remarque. — Soit x, y un point quelconque du plan; les coefficients angulaires, m, des tangentes en (x, y) aux courbes intégrales qui passent par ce point sont donnés par l'équation proposée où l'on fait $\frac{dy}{dx} = m$, à savoir

$$y + x\varphi(m) + \psi(m) = 0.$$

Le lieu des points x, y pour lesquels un de ces coefficients a une valeur donnée, m_0, est la droite

$$y + x\varphi(m_0) + \psi(m_0) = 0.$$

En d'autres termes, aux points où elles rencontrent une même droite de la famille $y + x\varphi(m) + \varphi(m) = 0$, m désignant un paramètre variable, les courbes intégrales de l'équation de Lagrange ont leurs tangentes parallèles entre elles.

Réciproquement, si des courbes (C), en nombre simplement infini, jouissent de cette propriété, elles sont les courbes intégrales d'une équation de Lagrange.

En effet, par hypothèse, aux points de rencontre d'une même droite $Y + X\varphi(m) + \psi(m) = 0$ avec toutes les courbes (C), les tangentes menées à celles-ci sont parallèles; leur coefficient angulaire commun est donc une fonction de m, $f_1(m)$. Sous une autre forme, en un point *quelconque*, (x, y), du plan, le coefficient angulaire, $\frac{dy}{dx}$, de la tangente à la courbe (C) qui passe par ce point, est égal à $f_1(m)$, m désignant une racine de l'équation $y + x\varphi(m) + \psi(m) = 0$. On peut écrire aussi $m = f\left(\frac{dy}{dx}\right)$, et l'on en conclut, le long d'une courbe (C), la relation

$$y + x\varphi\left[f\left(\frac{dy}{dx}\right)\right] + \psi\left[f\left(\frac{dy}{dx}\right)\right] = 0,$$

qui est une équation de Lagrange.

Si l'on observe que les droites

$$y + x\varphi(m) + \psi(m) = 0$$

enveloppent une courbe, évidemment quelconque puisque les fonctions φ et ψ sont quelconques, on peut dire aussi que toutes les courbes intégrales d'une équation de Lagrange coupent chaque tangente d'une courbe fixe sous un même angle, variable en général d'une tangente à l'autre, et réciproquement.

262. Exemple. — L'équation

$$4y'^3 - 6y'^2 + 9(y - x) = 0,$$

considérée au n° **244**, est du type de Lagrange ; écrivons-la

$$4p^3 - 6p^2 + 9(y - x) = 0,$$

et dérivons par rapport à x. Nous trouvons

$$4(p^2 - p)\frac{dp}{dx} + 3(p - 1) = 0;$$

et, en séparant les variables x et p,

$$(p - 1)(4p\,dp + 3dx) = 0.$$

Nous avons donc deux solutions :

1° $p = 1$, qui donne dans la proposée : $-2 + 9(y - x) = 0$, solution singulière.

2° $2p^2 + 3x = 3C$, relation qui, jointe à la proposée, donne paramétriquement les courbes intégrales

$$x = \frac{1}{3}(3C - 2p^2), \qquad y = \frac{1}{9}(3C - 4p^3),$$

le paramètre étant p. En éliminant p entre ces deux relations, on trouve, entre x et y, l'équation

$$2(x - C)^3 + 3(y - C)^2 = 0,$$

solution générale.

263. 9° Équations de Clairaut. — Elles sont comprises, comme cas particulier, dans celles de Lagrange ; on y suppose

$$\varphi\left(\frac{dy}{dx}\right) = -\frac{dy}{dx},$$

de sorte que le type de Clairaut est :

$$y = x\frac{dy}{dx} + \psi\left(\frac{dy}{dx}\right). \tag{11}$$

Pour intégrer, dérivons encore par rapport à x ; il vient :

$$\frac{d^2y}{dx^2}\left[x + \psi'\left(\frac{dy}{dx}\right)\right] = 0,$$

ce qui donne deux solutions.

Première solution :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{dy}{dx} = C,$$

et, par l'équation proposée (11),

$$y = Cx + \psi(C).$$

C'est la solution générale; *on l'obtient en remplaçant, dans l'équation différentielle,* $\frac{dy}{dx}$ *par la constante arbitraire* C. Les courbes intégrales sont des droites.

Deuxième solution :

$$x + \psi'\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

équation qui, combinée avec la proposée (11), donne, par l'élimination de $\frac{dy}{dx}$, une relation entre x et y sans constante arbitraire. C'est la solution singulière: elle représente évidemment, d'après son mode de formation, l'enveloppe des droites fournies par l'intégrale générale.

264. Ce sont là, à peu près, tous les types généraux d'équations différentielles du premier ordre que l'on sait intégrer; il est à remarquer que, sauf dans les types de Lagrange et de Clairaut, la dérivée $\frac{dy}{dx}$ figure linéairement. Si donc on a à intégrer une équation différentielle qu'on ne puisse résoudre par rapport à $\frac{dy}{dx}$, on se trouvera arrêté dès le début, même dans les cas les plus simples.

Soit, par exemple, l'une ou l'autre des équations

$$f\left(x, \frac{dy}{dx}\right) = 0 \qquad \text{ou} \qquad f\left(y, \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

dont la première se ramène d'ailleurs à la seconde en prenant x comme fonction et y comme variable, car on l'écrit

$$f\left[x, \frac{1}{\left(\frac{dx}{dy}\right)}\right] = 0.$$

Si l'on peut résoudre par rapport à $\frac{dy}{dx}$, les deux équations proposées rentrent dans le type à variables séparées

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x) \qquad \text{ou} \qquad \frac{dy}{dx} = \varphi(y),$$

d'où l'on déduit

$$y = \int \varphi(x)\,dx + \text{const.}, \qquad \text{ou} \qquad x = \int \frac{dy}{\varphi(y)} + \text{const.}$$

Mais, si la résolution par rapport à $\frac{dy}{dx}$ est impossible, on ne pourra expliciter les calculs.

Il y a toutefois deux cas où cette résolution préalable ne sera pas nécessaire.

263. Premier cas. — On peut résoudre l'équation différentielle

$$f\left(x, \frac{dy}{dx}\right) = 0 \qquad \text{ou} \qquad f\left(y, \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

par rapport à x ou y. On a ainsi, en posant $\frac{dy}{dx} = p$,

$$(12) \qquad x = \varphi(p) \qquad \text{ou} \qquad y = \varphi(p),$$

d'où

$$dx = \varphi'(p)\,dp \qquad\qquad dy = \varphi'(p)\,dp$$

$$dy = p\,dx \qquad\qquad dx = \frac{dy}{p}$$

$$= p\,\varphi'(p)\,dp \qquad\qquad = \frac{1}{p}\varphi'(p)\,dp$$

et

$$(13) \qquad y = \int p\,\varphi'(p)\,dp + C \qquad\qquad x = \int \frac{1}{p}\varphi'(p)\,dp + C.$$

Dans les deux cas, les équations (12) et (13) donneront x et y exprimés en fonction du paramètre p et d'une constante, ce qui définit la courbe intégrale générale [1]

[1] En réalité les équations

$$x = \varphi\left(\frac{dy}{dx}\right), \qquad y = \varphi\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

sont des équations de Lagrange, et l'on n'a fait que leur appliquer la méthode générale.

266. Second cas. — La courbe

$$f\left(x, \frac{dy}{dx}\right) = 0 \quad \text{ou} \quad f\left(y, \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

quand on regarde x et $\frac{dy}{dx}$ $\left(\text{ou } y \text{ et } \frac{dy}{dx}\right)$ comme les coordonnées courantes, est de genre zéro ou un.

On peut alors exprimer x et $\frac{dy}{dx}$ dans le premier cas, y et $\frac{dy}{dx}$ dans le second, en fonction rationnelle ou elliptique d'un paramètre, u, sous la forme

$$(14) \qquad \begin{cases} x = \varphi(u) \\ \dfrac{dy}{dx} = \psi(u) \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} y = \varphi(u), \\ \dfrac{dy}{dx} = \psi(u). \end{cases}$$

On en conclut

$$\begin{aligned} dx &= \varphi'(u)\,du & \text{ou} \qquad dy &= \varphi'(u)\,du, \\ dy &= \psi(u)\,dx & dx &= \frac{dy}{\psi(u)} \\ &= \psi(u)\varphi'(u)\,du & &= \frac{\varphi'(u)}{\psi(u)}\,du, \end{aligned}$$

et par suite

$$(15) \quad y = \int \psi(u)\varphi'(u)\,du + C \quad \text{ou} \quad x = \int \frac{\varphi'(u)}{\psi(u)}\,du + C.$$

Dans les deux cas, x et y, par (14) et (15), sont encore exprimés en fonction du paramètre u et de la constante : les deux intégrations indiquées dans (15) portent d'ailleurs sur des fonctions rationnelles ou elliptiques de u, et peuvent dès lors s'effectuer.

267. Remarques générales. — Pour intégrer les équations homogènes, les équations linéaires, celles de Bernoulli et de Riccati, il n'est pas nécessaire de ramener le coefficient de $\frac{dy}{dx}$ à être égal à l'unité ou à une constante, comme nous l'avons supposé pour simplifier les écritures. Dans la pratique on appliquera les méthodes d'intégration indiquées, sans prendre cette précaution préalable. Au contraire, dans l'équation de Lagrange, il faut que le coefficient de y soit l'unité ou une constante.

2° On ne devra pas oublier que x peut être considéré comme l'inconnue et y comme la variable indépendante, ce qui peut faire rentrer dans les types intégrables des équations, qui, au premier coup d'œil, en paraissent éloignées. Ainsi l'équation

$$\frac{dy}{dx} = \frac{A}{Bx + C},$$

où A, B, C sont des fonctions de y, est une équati›n néaire en x puisqu'on l'écrit

$$A\frac{dx}{dy} = Bx + C.$$

III. — ÉQUATIONS GÉNÉRALES DU PREMIER ORDRE; DIVERS ARTIFICES D'INTÉGRATION.

---

268. Si une équation différentielle du premier ordre ne rentre pas dans un des types précédents, on ne saura généralement pas l'intégrer; on sera réduit à essayer divers artifices. Nous allons en indiquer trois, dont le succès d'ailleurs est toujours incertain.

269. Procédé de la dérivation. — 1° Soit

$$(1) \qquad f(x, y, y') = 0$$

l'équation proposée. Dérivons par rapport à la variable indépendante, x; nous avons

$$(2) \qquad \frac{\partial f}{\partial x} + y'\frac{\partial f}{\partial y} + y''\frac{\partial f}{\partial y'} = 0.$$

Essayons de combiner les relations (1) et (2) de manière à obtenir une équation dont le premier membre soit, à un facteur près, la dérivée exacte d'une fonction de x, y, y'; c'est-à-dire une équation de la forme

$$\theta(x, y, y')\frac{d}{dx}\psi(x, y, y') = 0.$$

On en déduira

$$(3) \qquad \psi(x, y, y') = \text{const.}$$

et, en éliminant y' entre (3) et la proposée (1), on aura l'intégrale cherchée.

La solution $\theta(x, y, y') = 0$, combinée avec (1), donnera, par élimination de y', une intégrale sans constante arbitraire, qui sera l'intégrale singulière ou une solution étrangère.

2° On peut encore appliquer autrement, et d'une manière plus précise, le procédé de dérivation; résolvons la proposée (1) par rapport à y

$$y = \varphi(x, p) \tag{4}$$

étant posé

$$\frac{dy}{dx} = p.$$

Dérivons par rapport à x les deux membres de (4); il vient

$$p = \varphi'_x + \varphi'_p \frac{dp}{dx}, \tag{5}$$

équation différentielle entre et p et x, qui pourra être plus facile à intégrer que la proposée. Si l'on peut en tirer p en fonction de x, l'équation (4) donnera y. C'est la méthode qu'on a suivie pour les équations de Lagrange : l'équation (5) est alors une équation linéaire en x et $\frac{dx}{dp}$, et peut par suite s'intégrer. Même procédé en résolvant la proposée par rapport à x, et en considérant y comme la variable indépendante.

Exemple. — L'équation $y = x\frac{dy}{dx} + x^2 f\left(\frac{dy}{dx}\right)$, analogue à celle de Clairaut, donne par dérivation, p représentant toujours $\frac{dy}{dx}$,

$$p = p + 2xf(p) + \frac{dp}{dx}[x + x^2 f'(p)] = 0,$$

d'où, après division par x,

$$2\frac{dx}{dp}f(p) + xf'(p) + 1 = 0,$$

équation linéaire en x, qu'on intègre par la méthode générale, et

qui donne

$$x = -\frac{1}{2\sqrt{f(p)}}\int\frac{dp}{\sqrt{f(p)}} + \frac{C}{\sqrt{f(p)}}.$$

Cette relation, jointe à la proposée

$$y = px + x^2 f(p),$$

permet d'exprimer x et y en fonction du paramètre p et d'une constante arbitraire C.

270. Procédé du facteur intégrant. — L'équation différentielle étant mise sous la forme

$$(6) \qquad M\,dx + N\,dy = 0,$$

où M et N sont des fonctions de x, y, Euler s'est proposé de déterminer un facteur, μ, tel que l'expression

$$\mu(M\,dx + N\,dy)$$

soit une différentielle exacte, x et y étant considérés comme deux variables indépendantes. Si l'on peut trouver un tel facteur, on aura identiquement

$$\mu(M\,dx + N\,dy) = du,$$

u désignant une fonction de x et y, et l'équation proposée (6) s'écrira

$$\frac{1}{\mu}\,du = 0.$$

On y satisfera en posant

$$du = 0, \qquad \text{d'où} \qquad u(x, y) = \text{const.},$$

intégrale générale ; ou

$$\frac{1}{\mu} = 0,$$

solution singulière ou étrangère.

Tout revient donc à trouver un facteur *intégrant* μ. Or la condition pour que $\mu(M\,dx + N\,dy)$ soit différentielle exacte est qu'on ait identiquement (Tome I, n° 327)

$$(7) \qquad \frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$$

ou

$$M\frac{\partial\mu}{\partial y} - N\frac{\partial\mu}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = 0. \tag{7 bis}$$

C'est là une équation aux dérivées partielles, généralement plus difficile à intégrer que la proposée (6). Si l'on peut en obtenir *une* solution particulière, μ, la fonction $u(x,y)$ sera donnée par la formule (Tome I, n° 327)

$$u(x, y) = \int_{x_0}^{x} \mu M\,dx + \int_{y_0}^{y} (\mu N)_0\,dy,$$

$(\mu N)_0$ étant ce que devient μN pour $x = x_0$, et la solution générale de (6) sera $u = \text{const.}$

271. Le facteur intégrant existe-t-il? C'est demander si l'équation aux dérivées partielles (7) ou (7 *bis*) a des solutions: or nous verrons plus tard qu'une équation aux dérivées partielles admet une solution générale, laquelle renferme une fonction arbitraire; il y a donc toujours des facteurs intégrants.

On peut le voir autrement: soit, en effet, $\Phi(x, y, C) = 0$ la solution générale de l'équation différentielle proposée (6). Si l'on résout par rapport à C, cette solution s'écrit

$$C = \varphi(x, y), \tag{8}$$

d'où l'on tire par dérivation

$$0 = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy,$$

équation différentielle à laquelle satisfait la fonction y, définie par (8), et qui doit, par suite, être identique (n° **240**) à la proposée (6). On a donc *identiquement*, c'est-à-dire quels que soient x et y,

$$\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x}}{M} = \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial y}}{N}.$$

Soit $\mu(x, y)$ la valeur commune de ces rapports, il vient

$$\mu M = \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \qquad \mu N = \frac{\partial\varphi}{\partial y},$$

d'où l'on conclut *identiquement :*

$$\mu(\mathrm{M}\,dx + \mathrm{N}\,dy) = \frac{d\varphi}{dx}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dx = d\,\varphi(x,y).$$

La fonction μ est donc un facteur intégrant ([1]). C. Q. F. D.

272. Quand on connaît un facteur intégrant d'une équation du premier ordre, on peut trouver tous les autres.

Soient μ le facteur connu, μ' un quelconque des autres. Posons

$$\mu' = \mu\theta,$$

et déterminons θ. Par hypothèse on a

$$(9)\qquad \begin{cases} \mu\,(\mathrm{M}\,dx + \mathrm{N}\,dy) = du, \\ \mu\theta(\mathrm{M}\,dx + \mathrm{N}\,dy) = dv, \end{cases}$$

d'où l'on conclut

$$dv = \theta\,du.$$

Or v et u sont des fonctions de x et de y; on peut donc regarder v comme fonction de x et de u, pris pour variables indépendantes; et l'on a alors

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial u}du.$$

Si l'on compare cette relation à la relation $dv = \theta\,du$, on en déduit

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial v}{\partial u} = \theta.$$

La première de ces équations montre que v est constant par rapport à x, c'est-à-dire ne dépend que de u; la seconde, $\frac{\partial v}{\partial u} = \theta$, montre alors que θ est aussi une fonction de u seul, $\theta = \varphi(u)$, et l'on a $\mu' = \mu\varphi(u)$.

Réciproquement, μ étant facteur intégrant, $\mu\varphi(u)$, où $\varphi(u)$ désigne une fonction *quelconque* de u, est aussi facteur intégrant;

([1]) On voit ainsi qu'étant donnée une expression de la forme

$$\alpha(u, v)\,du + \beta(u, v)\,dv,$$

il existe toujours un facteur, $\mu(u, v)$, tel que $\mu(\alpha\,du + \beta\,dv)$ soit la différentielle exacte d'une fonction des deux variables u, v. C'est ce qu'on a admis sans démonstration au Tome I, n° 464.

car on déduit de la première équation (9), à savoir

$$(9) \qquad \mu(M\,dx + N\,dy) = du,$$

celle-ci :

$$\mu\varphi(u)(M\,dx + N\,dy) = \varphi(u)\,du,$$

dont le second membre est bien une différentielle exacte.

Donc μ étant un facteur intégrant et du la différentielle exacte correspondante, tous les autres facteurs sont de la forme $\mu\varphi(u)$, et réciproquement.

273. On pourrait intégrer, par le procédé du facteur, les équations linéaires

$$dy - (Py + Q)\,dx = 0,$$

intégrées autrement au n° 253 : il existe en effet un facteur intégrant, μ, *fonction de x seul*, et facile à déterminer. Car, la condition (7) s'écrit ici

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{\partial}{\partial y}\mu(Py + Q),$$

c'est-à-dire, puisque μ, P, Q sont supposés fonctions de x seul, et, par suite, indépendants de y,

$$\frac{d\mu}{dx} = \mu P,$$

d'où

$$\frac{d\mu}{\mu} = P\,dx, \qquad \mu = e^{\int P\,dx}.$$

La méthode du n° 253 est d'ailleurs préférable à celle du facteur.

274. Procédé du changement de variable. — On peut souvent, par un changement d'inconnue, ramener à un type intégrable une équation qui en semblait très éloignée : il est évidemment impossible de donner à ce sujet des règles générales; on se bornera à deux exemples.

1° Soit l'équation

$$\frac{dy}{dx} = (Py + Q)\sqrt{1 + y^2},$$

où P et Q sont des fonctions de x : elle ne rentre dans aucun des huit types du paragraphe précédent. Il est assez naturel d'essayer de la transformer en faisant disparaître le radical : il faudrait, pour cela, y exprimer y et $\sqrt{1+y^2}$ rationnellement en fonction d'une nouvelle inconnue. Or on a vu dans le Tome I que ce problème est possible, et se résout en particulier (n° **214**) par le changement de variable

$$y = \frac{1-t^2}{2t},$$

d'où

$$\sqrt{1+y^2} = \frac{1+t^2}{2t}$$

et

$$dy = -\frac{1}{2}\,\frac{1+t^2}{t^2}\,dt.$$

Portons ces valeurs dans l'équation différentielle proposée ; elle devient

$$-\frac{1}{2}\,\frac{1+t^2}{t^2}\,\frac{dt}{dx} = \left(P\,\frac{1-t^2}{2t} + Q\right)\frac{1+t^2}{2t},$$

c'est-à-dire

$$\frac{dt}{dx} + \frac{P}{2}(1-t^2) + Qt = 0,$$

équation de Riccati, qu'on intégrerait si l'on en connaissait une solution particulière.

2° On pourra quelquefois employer avec succès la transformation de Legendre (Tome I, n° **109**, *Remarque II*).

Soit l'équation différentielle

$$f(x, y, y') = 0.$$

On posera

$$Y = -y + xy', \qquad X = y',$$

d'où

$$dY = -y'\,dx + y'\,dx + x\,dy' = x\,dX,$$

ce qui donne finalement

$$x = \frac{dY}{dX}, \qquad y = xy' - Y = X\frac{dY}{dX} - Y, \qquad y' = X.$$

Portons ces valeurs dans la proposée ; celle-ci devient

$$f\left(\frac{dY}{dX},\, X\frac{dY}{dX} - Y,\, X\right) = 0,$$

équation différentielle du premier ordre en Y et X, qui pourra être plus facile à intégrer que la proposée. Soit $\mathrm{Y} = \mathrm{F}(\mathrm{X}, \mathrm{C})$ sa solution générale, on aura

$$x = \frac{d\mathrm{Y}}{d\mathrm{X}} = \mathrm{F}'_{\mathrm{X}}(\mathrm{X}, \mathrm{C}),$$

$$y = \mathrm{X}\frac{d\mathrm{Y}}{d\mathrm{X}} - \mathrm{Y} = \mathrm{X}\,\mathrm{F}'_{\mathrm{X}}(\mathrm{X}, \mathrm{C}) - \mathrm{F}(\mathrm{X}, \mathrm{C}),$$

équations qui donnent x et y en fonction d'un paramètre X, et d'une constante arbitraire C, et définissent par suite la courbe intégrale générale de l'équation primitive.

Par exemple, l'équation

$$\Phi(xy' - y) = x\,\varphi(y')$$

devient, par cette transformation,

$$\Phi(\mathrm{Y}) = \frac{d\mathrm{Y}}{d\mathrm{X}}\,\varphi(\mathrm{X}),$$

relation différentielle où les variables se séparent.

L'équation $y = xy' + x^2 f(y')$, déjà rencontrée au n° **269**, 2°, appartient à ce type, car elle s'écrit

$$\sqrt{y - xy'} = x\sqrt{f(y')};$$

elle pourrait dès lors être intégrée par la méthode précédente.

IV. — APPLICATIONS.

275. Tous les problèmes de Géométrie où il s'agit de déterminer une courbe, dans le plan ou sur une surface donnée, par une propriété de ses tangentes, conduisent évidemment à des équations différentielles du premier ordre; on va en donner quelques exemples.

Problème des trajectoires.

276. **Problème.** — *Étant donnée une famille de courbes*

planes (axes rectangulaires) dont l'équation générale renferme un paramètre C,

$$(1)\qquad F(X, Y, C) = 0,$$

trouver les courbes qui coupent sous un angle donné, V, *toutes les courbes de la famille.*

Soit x, y un point quelconque du plan; pour la courbe de la famille (1) qui y passe, C est déterminé par l'équation

$$(2)\qquad F(x, y, C) = 0,$$

et le coefficient angulaire de la tangente à cette courbe en x, y est $-\frac{(F'_x)}{(F'_y)}$, les parenthèses indiquant que C a été remplacé, dans les deux termes de la fraction, par sa valeur tirée de (2). Le coefficient angulaire de la tangente à la trajectoire au même point étant $\frac{dy}{dx}$, on aura

$$\operatorname{tang} V = \frac{\frac{dy}{dx} + \frac{(F'_x)}{(F'_y)}}{1 - \frac{dy}{dx}\frac{(F'_x)}{(F'_y)}}.$$

C'est l'équation différentielle des trajectoires. On peut évidemment dire, sous une autre forme, qu'elle s'obtient par l'élimination de C entre les deux équations

$$(3)\qquad F(x, y, C) = 0,\qquad \operatorname{tang} V = \frac{\frac{dy}{dx} + \frac{F'_x}{F'_y}}{1 - \frac{dy}{dx}\frac{F'_x}{F'_y}}.$$

Pour les trajectoires orthogonales, tang V est infini, et l'équation différentielle s'obtient en éliminant C entre

$$(4)\qquad F(x, y, C) = 0,\qquad F'_x \frac{dy}{dx} - F'_y = 0.$$

277. Exemple I. — *Trajectoires obliques des courbes* $y = Cx^m$. — Ces courbes sont homothétiques les unes des autres par rapport à l'origine; leurs trajectoires jouiront évidemment de la même propriété, c'est-à-dire que leur équation différentielle sera homogène (n° **250**).

Cette équation différentielle s'obtient (n° **276**) par l'élimination

de C entre les relations

$$y = Cx^m, \qquad \operatorname{tang} V = \frac{y' - mCx^{m-1}}{1 + my'Cx^{m-1}},$$

d'où le résultat :

$$\operatorname{tang} V\left(1 + my'\frac{y}{x}\right) = y' - m\frac{y}{x},$$

équation qui est bien homogène. Pour l'intégrer, posons (n° **249**)

$$y = ux;$$

nous aurons

$$\operatorname{tang} V[1 + mu(u'x + u)] = u'x + u - mu,$$

c'est-à-dire

$$x\frac{du}{dx}(mu \operatorname{tang} V - 1) = u(1 - m) - \operatorname{tang} V(1 + mu^2),$$

et, en séparant les variables,

$$\frac{dx}{x} = \frac{mu \operatorname{tang} V - 1}{mu^2 \operatorname{tang} V + u(m-1) + \operatorname{tang} V}\, du.$$

L'intégration n'offre aucune difficulté; faisons-la dans le cas de $m = 1$: les courbes proposées sont alors des droites issues de l'origine. Il vient

$$\text{const.} + \log x = \int \frac{du}{\operatorname{tang} V}\,\frac{1 - u \operatorname{tang} V}{1 + u^2} = \frac{1}{\operatorname{tang} V} \operatorname{arc\,tang} u - \frac{1}{2}\log(1 + u^2),$$

ce qui s'écrit

$$x\sqrt{1 + u^2} = Ce^{\frac{\operatorname{arc\,tang} u}{\operatorname{tang} V}}.$$

Remplaçant u par $\frac{y}{x}$, on aurait l'équation des trajectoires; il vaut mieux employer les coordonnées polaires, en posant

$$x = \rho\cos\omega, \qquad y = \rho\sin\omega,$$

ce qui donne

$$u = \operatorname{tang}\omega, \qquad \text{ou} \qquad \operatorname{arc\,tang} u = \omega.$$

On a ainsi

$$\rho = Ce^{\frac{\omega}{\operatorname{tang} V}},$$

équation de spirales logarithmiques ayant l'origine pour pôle.

278. Exemple II. — *Trajectoires orthogonales des tangentes à une courbe* (*Développantes*). — Soit, en fonction d'un paramètre C,

$$x = -Cy + \varphi(C)$$

l'équation générale de ces tangentes; il faut, pour obtenir l'équation différentielle de leurs trajectoires orthogonales, éliminer C entre cette équation et la seconde équation (4), qui est ici

$$\frac{dy}{dx} - C = 0.$$

Il vient ainsi

$$x = -y\frac{dy}{dx} + \varphi\left(\frac{dy}{dx}\right),$$

équation différentielle du type de Lagrange. Pour l'intégrer, posons $\frac{dy}{dx} = p$, et résolvons, par rapport à y,

$$y = -\frac{x}{p} + \frac{\varphi(p)}{p},$$

ou, en posant, pour simplifier, $\frac{\varphi(p)}{p} = \psi(p)$,

$$(5) \qquad y = -\frac{x}{p} + \psi(p).$$

Dérivons, par rapport à x, suivant la méthode générale (nº **260**); nous trouvons

$$p = -\frac{1}{p} + \frac{dp}{dx}\left[\frac{x}{p^2} + \psi'(p)\right]$$

ou

$$\frac{dx}{dp}(p^2 + 1)p - x - p^2\psi'(p) = 0,$$

équation linéaire en x, qu'on intégrera, d'après le nº **253**, en posant

$$(6) \qquad x = uv, \qquad \frac{dv}{dp}(p^2+1)p - v = 0, \qquad v\frac{du}{dp}(p^2+1)p - p^2\psi'(p) = 0.$$

On tire de la deuxième de ces relations

$$\int\frac{dv}{v} = \int\frac{dp}{p(p^2+1)} = \int dp\left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+1}\right) = \log p - \frac{1}{2}\log(p^2+1),$$

c'est-à-dire

$$v = \frac{p}{\sqrt{p^2+1}}.$$

Portons cette valeur de v dans la troisième relation (6); il vient

$$\frac{du}{dp}(p^2+1)^{\frac{1}{2}} = \psi'(p),$$

d'où

$$u = \int \frac{\psi'(p)\,dp}{\sqrt{p^2+1}} + C;$$

et enfin

$$(7) \qquad x = uv = \frac{p}{\sqrt{p^2+1}} \int \frac{\psi'(p)\,dp}{\sqrt{p^2+1}} + C\frac{p}{\sqrt{p^2+1}}.$$

Reportons-nous maintenant à l'équation primitive (5); nous avons

$$(8) \quad y = -\frac{x}{p} + \psi(p) = -\frac{1}{\sqrt{p^2+1}} \int \frac{\psi'(p)\,dp}{\sqrt{p^2+1}} - \frac{C}{\sqrt{p^2+1}} + \psi(p).$$

Les relations (7) et (8) définissent, pour la courbe générale cherchée, les coordonnées x, y d'un point en fonction d'un paramètre p; le problème est théoriquement résolu, il ne reste qu'une quadrature à effectuer.

Remarque. — En vertu de la Remarque du n° **261**, les courbes qui coupent sous un angle fixe les tangentes d'une courbe donnée sont les intégrales d'une équation de Lagrange : le problème des trajectoires des tangentes à une courbe conduit donc à une équation de Lagrange; on vient de le constater pour les trajectoires orthogonales.

279. Exemple III. — *Trajectoires orthogonales d'une famille de cercles.* — Soient les circonférences

$$(9) \qquad (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 - R^2 = 0,$$

où α, β, R sont des fonctions données d'un même paramètre t; pour trouver l'équation différentielle de leurs trajectoires orthogonales, il faut éliminer t entre l'équation précédente et la relation

$$(10) \qquad (x-\alpha)\frac{dy}{dx} - (y-\beta) = 0.$$

Cette élimination n'est possible que si l'on a explicitement α, β et R en fonction de t. On peut tourner la difficulté en changeant d'inconnue et de variable.

Posons

$$\frac{y-\beta}{x-\alpha} = \operatorname{tang}\theta; \tag{11}$$

nous avons, en tenant compte de (9),

$$\frac{y-\beta}{\sin\theta} = \frac{x-\alpha}{\cos\theta} = R;$$

d'où

$$y = \beta + R\sin\theta, \qquad x = \alpha + R\cos\theta, \tag{12}$$

relations équivalentes à (9) et (11).

Entre les équations (10) et (12), cherchons à éliminer x et y, de manière à obtenir une équation différentielle entre θ et t. Nous tirons de (12) :

$$\begin{aligned} dy &= R\cos\theta\,d\theta + dt(\beta' + R'\sin\theta),\\ dx &= -R\sin\theta\,d\theta + dt(\alpha' + R'\cos\theta), \end{aligned}$$

α', β', R' désignant les dérivées de α, β, R par rapport à t.

Portons dans (10) ces valeurs de dx, dy, et les valeurs (12) de x et y; nous obtenons l'équation différentielle en θ et t :

$$R\,d\theta + dt(\beta'\cos\theta - \alpha'\sin\theta) = 0$$

ou

$$\frac{d\theta}{dt} + \frac{\beta'}{R}\cos\theta - \frac{\alpha'}{R}\sin\theta = 0.$$

Prenons pour inconnue $\operatorname{tang}\frac{\theta}{2}$, en posant

$$\operatorname{tang}\frac{\theta}{2} = u; \qquad \text{d'où} \qquad d\theta = \frac{2\,du}{1+u^2};$$

l'équation différentielle précédente devient l'*équation de Riccati*

$$2\frac{du}{dt} + \frac{\beta'}{R}(1-u^2) - \frac{2\alpha'}{R}u = 0.$$

On saura l'intégrer si l'on en connaît une solution, c'est-à-dire si l'on connaît *a priori* une des trajectoires orthogonales des cercles proposés. En intégrant, on aura u, et par suite θ, en fonc-

tion de t (et d'une constante arbitraire); les équations (12) donneront alors x et y exprimés en t, ce qui définira la trajectoire orthogonale générale.

Application. — Si les cercles donnés ont leurs centres en ligne droite, cette droite sera évidemment une de leurs trajectoires orthogonales, et l'équation de Riccati pourra s'intégrer.

Par exemple, considérons les cercles dont les centres sont sur Ox, et dont le rayon est égal à $\frac{1}{m}$ fois l'abscisse du centre :

$$(x-\alpha)^2+y^2=\frac{1}{m^2}\alpha^2.$$

Prenons, pour t, l'abscisse α; nous aurons

$$\beta=\beta'=0, \qquad \alpha'=1,$$

et l'équation de Riccati s'écrira

$$2\frac{du}{d\alpha}-2\frac{mu}{\alpha}=0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{du}{u}=m\frac{d\alpha}{\alpha},$$

ce qui donne

$$u=C\alpha^m,$$

et par (12), puisque $u=\operatorname{tang}\frac{\theta}{2}$,

$$y=\frac{\alpha}{m}\frac{2C\alpha^m}{1+C^2\alpha^{2m}}, \qquad x=\alpha+\frac{\alpha}{m}\frac{1-C^2\alpha^{2m}}{1+C^2\alpha^{2m}},$$

équations paramétriques des trajectoires orthogonales, α étant le paramètre variable.

Lignes de courbure et lignes asymptotiques.

280. Lignes de courbure. — On a vu dans le Tome I que les lignes de courbure d'une surface s'obtiennent en intégrant l'équation aux directions principales : c'est une équation différentielle du premier ordre. On a déjà (Tome I) donné des exemples, dans lesquels l'équation différentielle est du type à variables séparées; en voici d'autres.

281. 1° Quadriques à centre :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

L'ordonnée z étant regardée comme fonction de x et y, l'équation différentielle des lignes de courbure est (Tome I, n° **428**)

$$(1)\qquad \begin{vmatrix} 1+p^2 & pq & 1+q^2 \\ r & s & t \\ dy^2 & -dx\,dy & dx^2 \end{vmatrix} = 0,$$

p, q, r, s, t désignant, comme d'ordinaire, les dérivées premières et secondes de z par rapport à x et y.

On calcule p et q en dérivant l'équation de la surface par rapport à x, puis par rapport à y, ce qui donne :

$$p=-\frac{c^2}{a^2}\frac{x}{z},\qquad q=-\frac{c^2}{b^2}\frac{y}{z},$$

puis, par de nouvelles dérivations, en tenant compte de l'équation de la surface,

$$r=\frac{-c^2}{a^2}\frac{z-px}{z^2}=\frac{c^4}{a^2b^2}\frac{y^2-b^2}{z^3},\quad s=-\frac{c^4}{a^2b^2}\frac{xy}{z^3},\quad t=\frac{c^4}{a^2b^2}\frac{x^2-a^2}{z^3}.$$

Portant ces valeurs dans (1), on obtient après réductions, et en tenant toujours compte de l'équation de la quadrique, l'équation différentielle

$$xy\frac{c^2-b^2}{b^2}dy^2-xy\frac{c^2-a^2}{a^2}dx^2$$
$$+\left(\frac{c^2-a^2}{a^2}x^2-\frac{c^2-b^2}{b^2}y^2+a^2-b^2\right)dx\,dy=0$$

ou

$$(2)\qquad Axy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(x^2-Ay^2-B)\frac{dy}{dx}-xy=0,$$

en posant, pour abréger,

$$A=\frac{a^2}{b^2}\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2},\qquad B=a^2\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}.$$

C'est là une équation différentielle qui ne rentre dans aucun des cas intégrables. Monge a observé qu'on peut l'intégrer par la

méthode de dérivation (nº **269**, 1º); nous indiquerons ici une méthode plus rationnelle.

Si l'on multiplie par y le premier membre de l'équation à intégrer (2), on voit que y ne figure que dans les combinaisons y^2 et $y\frac{dy}{dx}$; il est donc indiqué de prendre y^2 comme inconnue. Ainsi, on posera $y^2 = u$, et, à cause de la symétrie que présente l'équation, $x^2 = v$. On a alors

$$y\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\frac{du}{dx} = \frac{1}{2}\frac{du}{dv} : \frac{dx}{dv} = \frac{du}{dv}\sqrt{v},$$

et l'équation (2) devient, après division par $\sqrt{v}$,

$$Av\left(\frac{du}{dv}\right)^2 + (v - Au - B)\frac{du}{dv} - u = 0,$$

équation linéaire en u et v (type de Lagrange). Résolvons-la par rapport à l'inconnue u, nous trouvons

$$u = \frac{vu'(Au'+1) - Bu'}{Au'+1} = vu' - B\frac{u'}{Au'+1},$$

en posant $u' = \frac{du}{dv}$: c'est une équation de Clairaut, dont on obtient l'intégrale générale (nº **263**) en remplaçant u' par la constante arbitraire λ; on a donc, pour la relation cherchée entre u et v,

$$u = \lambda v - \frac{B\lambda}{A\lambda+1},$$

et, en revenant à x et y,

$$(3) \qquad y^2 = \lambda x^2 - \frac{B\lambda}{A\lambda+1}.$$

Telle est l'équation des projections des lignes de courbure sur le plan des xy : elle représente des coniques. Les lignes de courbure sont donc algébriques; on peut aussi en déduire qu'elles sont à l'intersection de la quadrique proposée avec les quadriques homofocales $\frac{x^2}{a^2+\mu} + \frac{y^2}{b^2+\mu} + \frac{z^2}{c^2+\mu} = 1$ (*voir* Tome I, nº **446**).

2º Paraboloïde :

$$2z = a'x^2 + b'y^2.$$

On a

$$p = a'x, \qquad q = b'y, \qquad r = a', \qquad s = 0, \qquad t = b',$$

et l'équation des lignes de courbure, prise sous la forme (E), est

$$a'b'^2xy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(b'-a'+a'^2b'x^2-a'b'^2y^2)\frac{dy}{dx}-a'^2b'xy=0.$$

C'est une équation qu'on ramène à la forme (2) en posant

$$A=\frac{b'}{a'},\qquad B=\frac{a'-b'}{a'^2b'}.$$

L'intégrale générale est donc, d'après (3),

$$y^2=\lambda x^2+\frac{b'-a'}{a'b'}\,\frac{\lambda}{a'+b'\lambda}.$$

Les projections des lignes de courbure sont encore des coniques, et ces lignes sont algébriques.

282. Lignes asymptotiques. — Les lignes asymptotiques d'une surface, donnée sous la forme

$$x=x(u,v),\qquad y=y(u,v),\qquad z=z(u,v),$$

s'obtiennent (Tome I, n° 430) par l'intégration de l'équation différentielle

$$(4)\qquad R+2S\frac{dv}{du}+T\left(\frac{dv}{du}\right)^2=0,$$

qui est du premier ordre. Rappelons que R, S, T sont des fonctions de u, v, dont les valeurs proportionnelles sont respectivement

$$A\frac{\partial^2x}{\partial u^2}+B\frac{\partial^2y}{\partial u^2}+C\frac{\partial^2z}{\partial u^2},\qquad A\frac{\partial^2x}{\partial u\,\partial v}+\ldots,\qquad A\frac{\partial^2x}{\partial v^2}+\ldots,$$

A, B, C désignant les coefficients du plan tangent, à savoir

$$\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}-\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v},\qquad \ldots\ldots,\qquad \ldots.$$

283. Exemple. — *Lignes asymptotiques des surfaces réglées.* — Une droite de l'espace

$$(5)\qquad \begin{cases} x=a_1u+b_1,\\ y=a_2u+b_2,\\ z=a_3u+b_3,\end{cases}$$

engendre une surface si a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3 sont des fonctions d'une même variable, v. Les équations (5) définissent donc paramétriquement les coordonnées des points d'une surface réglée, en fonction des deux paramètres u et v. On a alors

$$\begin{aligned} A &= \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} = u(a_2 a'_3 - a_3 a'_2) + a_2 b'_3 - a_3 b'_2, \\ B &= \dots\dots\dots\dots\dots = u(a_3 a'_1 - a_1 a'_3) + a_3 b'_1 - a_1 b'_3, \\ C &= \dots\dots\dots\dots\dots = u(a_1 a'_2 - a_2 a'_1) + a_1 b'_2 - a_2 b'_1, \end{aligned}$$

a'_1, b'_1, ... étant les dérivées de a_1, b_1, ... par rapport à v.

On calcule sans difficulté $\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}$, ..., $\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$, et l'on obtient les valeurs proportionnelles de R, S, T, qui sont de la forme

$$0, \qquad f(v)\ (^1), \qquad u^2\varphi(v) + u\,\psi(v) + \chi(v),$$

f, φ, ψ, χ étant des fonctions de v qu'il est inutile d'écrire tout au long. L'équation différentielle (4) s'écrit donc

$$\frac{dv}{du}\left\{ 2f(v) + [u^2\varphi(v) + u\,\psi(v) + \chi(v)]\frac{dv}{du} \right\} = 0.$$

Elle se décompose en deux :

1° $$\frac{dv}{du} = 0; \qquad \text{d'où} \qquad v = \text{const.};$$

les lignes correspondantes sur la surface sont les génératrices rectilignes, solution évidente du problème (Tome I, n° **435**).

2° $$\frac{du}{dv} = M u^2 + N u + P,$$

M, N, P étant des fonctions de v seul. C'est une équation de Riccati, qu'on ne sait intégrer que si l'on en connaît une solution particulière : elle conduit à une propriété géométrique intéressante des lignes asymptotiques de la seconde série. D'après la remarque du n° **259**, le rapport anharmonique de quatre solutions u

---

(1) Car, dans la valeur proportionnelle de S, le coefficient de u est

$$a'_1(a_2 a'_3 - a_3 a'_2) + \dots + \dots,$$

quantité nulle identiquement.

de l'équation de Riccati, pour une même valeur, quelconque, de la variable v, est constant; c'est-à-dire que le rapport anharmonique des quatre valeurs de u qui correspondent aux points où une même génératrice rectiligne mobile ($v =$ const.) coupe quatre lignes asymptotiques fixes est constant. Or, sur une droite donnée sous la forme (5), le rapport anharmonique des quatre valeurs du paramètre u qui correspondent à quatre points de la droite est égal au rapport anharmonique de ces quatre points, par exemple au rapport anharmonique de leurs abscisses; donc :

Quatre lignes asymptotiques d'une surface réglée coupent une génératrice rectiligne en quatre points, dont le rapport anharmonique reste constant quand la génératrice varie.

284. Cas particulier. — Si la surface réglée admet une droite en dehors des génératrices, c'est-à-dire si celles-ci rencontrent une droite fixe, cette droite est une ligne asymptotique et fournit une solution particulière de l'équation de Riccati, qui peut dès lors s'intégrer.

C'est le cas, par exemple, des *surfaces réglées à plan directeur :* la droite fixe est alors la droite à l'infini du plan directeur. Traitons directement ce cas particulier.

Prenons pour plan directeur le plan des yz : une génératrice est

$$x = \alpha,$$
$$z = my + n;$$

elle engendrera une surface si m et n sont fonctions de α; l'équation des surfaces considérées est par suite

$$z = y\,\varphi(x) + \psi(x). \tag{6}$$

Si l'on considère x et y comme les paramètres u et v, l'équation différentielle des lignes asymptotiques est (Tome I, n° **428**)

$$r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2 = 0,$$

r, s, t désignant $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

Or l'équation (12) donne

$$p = y\,\varphi' + \psi', \qquad r = y\,\varphi'' + \psi'', \qquad q = \varphi, \qquad s = \varphi', \qquad t = 0,$$

d'où, pour l'équation différentielle des lignes asymptotiques,

$$(7) \qquad (y\varphi'' + \psi'')\,dx^2 + 2\varphi'\,dx\,dy = 0.$$

On a d'abord la solution $dx = 0$, d'où $x = \text{const.}$, valeur qui, portée dans l'équation (6) de la surface, donne les génératrices rectilignes. Après suppression du facteur dx, la relation (7) s'écrit

$$(8) \qquad 2\varphi'\frac{dy}{dx} + y\varphi'' + \psi'' = 0,$$

équation linéaire en y.

Comme les génératrices se projettent sur le plan des xy suivant des droites parallèles à Oy, on déduit de là, par la remarque du n° **256**, cette propriété géométrique, que l'on aurait pu obtenir aussi comme une conséquence de la propriété générale des asymptotiques d'une surface réglée :

Trois lignes asymptotiques d'une surface réglée à plan directeur déterminent, sur chaque génératrice rectiligne, des segments dont le rapport est constant.

L'équation (8) s'intègre par la méthode générale; on trouve ainsi :

$$y = \frac{-1}{2\sqrt{\varphi'}}\int\frac{\psi''}{\sqrt{\varphi'}}\,dx + \frac{C}{\sqrt{\varphi'}},$$

équation des projections, sur le plan des xy, des asymptotiques de la seconde série.

Trajectoires sur les surfaces; systèmes conjugués.

285. Trajectoires. — Le problème des trajectoires sur une surface se traite comme le problème analogue sur le plan.

La surface étant représentée paramétriquement (axes rectangulaires) par

$$(1) \qquad x = x(U, V), \qquad y = y(U, V), \qquad z = z(U, V),$$

proposons-nous de chercher les courbes qui coupent sous un angle donné, θ, toutes les courbes représentées, sur cette surface, par

l'équation

(2) $$F(U, V, C) = 0,$$

où C désigne un paramètre, variable d'une courbe à l'autre.

Soit (u, v) un point quelconque de la surface, il passe par ce point une courbe de la famille (2), et la valeur correspondante du paramètre C est donnée par l'équation

(3) $$F(u, v, C) = 0;$$

si l'on se déplace sur cette courbe, à partir du point (u, v) les différentielles δu et δv sont liées par la relation

(4) $$\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)\delta u + \left(\frac{\partial F}{\partial v}\right)\delta v = 0,$$

les parenthèses indiquant que C a été remplacé, dans $\frac{\partial F}{\partial u}$ et $\frac{\partial F}{\partial v}$, par sa valeur tirée de (3). Les paramètres directeurs de la tangente à la courbe considérée, au point (u, v), sont proportionnels à

$$\frac{\partial x}{\partial u}\delta u + \frac{\partial x}{\partial v}\delta v, \qquad \frac{\partial y}{\partial u}\delta u + \frac{\partial y}{\partial v}\delta v, \qquad \frac{\partial z}{\partial u}\delta u + \frac{\partial z}{\partial v}\delta v,$$

c'est-à-dire, en vertu de (4), à

(5) $$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial x}{\partial u}\left(\frac{\partial F}{\partial v}\right) - \frac{\partial x}{\partial v}\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right), \qquad \frac{\partial y}{\partial u}\left(\frac{\partial F}{\partial v}\right) - \frac{\partial y}{\partial v}\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right), \\ \qquad \frac{\partial z}{\partial u}\left(\frac{\partial F}{\partial v}\right) - \frac{\partial z}{\partial v}\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right). \end{array}\right.$$

Quant aux paramètres directeurs de la tangente en (u, v), à la trajectoire cherchée, ils sont proportionnels à

(6) $$\frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv, \qquad \frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv, \qquad \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv;$$

en écrivant que les deux directions (5) et (6) font entre elles l'angle θ, on obtiendra, entre u, v et $\frac{dv}{du}$, une relation qui sera l'équation différentielle des trajectoires cherchées.

286. Exemple. — Pour obtenir les trajectoires des courbes $v = C$, on fera, dans (5), $\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right) = 0$, $\left(\frac{\partial F}{\partial v}\right) = 1$, ce qui donnera,

pour l'équation différentielle finale,

$$\cos\theta = \frac{\left(\frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv\right)\frac{\partial x}{\partial u} + \left(\frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv\right)\frac{\partial y}{\partial u} + \left(\frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv\right)\frac{\partial z}{\partial u}}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv\right)^2 + \ldots + \ldots}\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2}},$$

ou, avec les notations du Tome I (n° **412**),

$$(7) \qquad \cos\theta = \frac{E\,du + F\,dv}{\sqrt{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}\sqrt{E}}.$$

Application. — Cherchons les trajectoires obliques des méridiens d'une surface de révolution. La surface étant représentée paramétriquement (Tome I, n° **416**) par (¹)

$$x = u\cos v, \qquad y = u\sin v, \qquad z = f(u),$$

les méridiens ont pour équation $v = C$, et l'on a (*ibid.*)

$$E = 1 + f'^2(u), \qquad F = 0, \qquad G = u^2.$$

L'équation (7) s'écrit dès lors

$$\cos\theta = \frac{du[1 + f'^2(u)]}{\sqrt{1 + f'^2(u)}\sqrt{du^2[1 + f'^2(u)] + u^2\,dv^2}},$$

ou

$$du^2[1 + f'^2(u)]\sin^2\theta = u^2\,dv^2\cos^2\theta.$$

Séparons les variables, il vient :

$$\frac{du\sqrt{1 + f'^2(u)}}{u} = dv\cot\theta,$$

d'où, pour l'équation en u et v des trajectoires cherchées,

$$\int \frac{du}{u}\sqrt{1 + f'^2(u)} = v\cot\theta + \text{const.},$$

résultat conforme à celui qui a été obtenu, avec d'autres notations et par une autre méthode, au n° **469** du Tome I.

287. Systèmes conjugués. — Deux droites, tangentes à une surface en un même point, sont dites *conjuguées* lorsqu'elles sont

(¹) L'axe de révolution est Oz ; la méridienne, dans le plan zOx, est $z = f(x)$.

conjuguées par rapport aux asymptotes de l'indicatrice de la surface en ce point.

La surface étant représentée paramétriquement, les cosinus directeurs d'une direction tangente au point u, v sont (Tome I, n° 340) proportionnels à

$$\frac{\partial x}{\partial u}du+\frac{\partial x}{\partial v}dv,\qquad \frac{\partial y}{\partial u}du+\frac{\partial y}{\partial v}dv,\qquad \frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv,$$

ou, en posant $\frac{dv}{du}=\lambda$, à

$$(8)\qquad \frac{\partial x}{\partial u}+\lambda\frac{\partial x}{\partial v},\qquad \frac{\partial y}{\partial u}+\lambda\frac{\partial y}{\partial v},\qquad \frac{\partial z}{\partial u}+\lambda\frac{\partial z}{\partial v},$$

λ désignant un paramètre, variable d'une tangente à l'autre.

Pour les directions asymptotiques, les valeurs de $\frac{dv}{du}$, ou λ, sont données (Tome I, n° 427) par l'équation

$$(9)\qquad R+2S\lambda+T\lambda^2=0,$$

R, S, T ayant l'expression indiquée plus haut (n° 282).

Il résulte de la forme linéaire en λ des quantités (8), et des propriétés classiques de l'homographie, que le rapport anharmonique de quatre droites tangentes à la surface en u, v est égal à celui des quatre valeurs correspondantes de λ : donc, pour exprimer que les deux directions qui répondent aux valeurs λ_1 et λ_2 du paramètre λ sont conjuguées, il suffit d'écrire que le rapport anharmonique de λ_1, λ_2, et des deux racines λ', λ'' de l'équation (9), est égal à -1, ce qui donne

$$\frac{\lambda'-\lambda_1}{\lambda'-\lambda_2}:\frac{\lambda''-\lambda_1}{\lambda''-\lambda_2}=-1$$

ou

$$2\lambda'\lambda''+2\lambda_1\lambda_2-(\lambda_1+\lambda_2)(\lambda'+\lambda'')=0,$$

c'est-à-dire, en vertu de (9),

$$(10)\qquad R+S(\lambda_1+\lambda_2)+T\lambda_1\lambda_2=0.$$

Soient maintenant, sur la surface, deux systèmes (ou familles) de courbes, simplement infini chacun, C et C'; on dit qu'ils sont conjugués si, en chaque point de la surface, les tangentes aux courbes C et C' qui passent par ce point sont conjuguées.

Le système C étant donné, la détermination d'un système conjugué revient à l'intégration d'une équation différentielle du premier ordre qu'on formera comme il suit.

Soit $F(u, v, C) = 0$ l'équation des courbes du système C, C étant un paramètre variable d'une courbe à l'autre; en vertu de (5), la valeur de λ qui répond à la tangente menée, au point u, v, à la courbe du système qui passe par ce point, est $-\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right) : \left(\frac{\partial F}{\partial v}\right)$; les parenthèses indiquent toujours que C a été remplacé, dans $\frac{\partial F}{\partial u}$ et $\frac{\partial F}{\partial v}$, par sa valeur tirée de $F(u, v, C) = 0$. Pour la tangente à la courbe du système conjugué qui passe par u, v, la valeur de λ est $\frac{dv}{du}$; on a donc, d'après (10),

$$R + S\left[-\frac{\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)}{\left(\frac{\partial F}{\partial v}\right)} + \frac{dv}{du}\right] - T\frac{\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)}{\left(\frac{\partial F}{\partial v}\right)}\frac{dv}{du} = 0, \tag{11}$$

équation différentielle des courbes du système conjugué.

Exemple. — Si le système C est le système $v =$ const., on devra faire, dans (11), $\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right) = 0$, $\left(\frac{\partial F}{\partial v}\right) = 1$, et il restera :

$$R\,du + S\,dv = 0.$$

Si S est identiquement nul, cette équation donnera $u =$ const., et réciproquement. Par suite, la condition nécessaire et suffisante pour que les deux systèmes $u =$ const. et $v =$ const. soient conjugués est qu'on ait $S = 0$, quels que soient u et v.

V. — ÉQUATION D'EULER.

288. — Soit $T(x)$ le polynome du quatrième degré

$$Ax^4 + 2Bx^3 + Cx^2 + 2Dx + E;$$

on nomme *équation d'Euler* l'équation différentielle du premier

ordre

$$(1) \qquad \frac{dx}{\sqrt{T(x)}} \pm \frac{dy}{\sqrt{T(y)}} = 0.$$

Elle s'intègre immédiatement par quadratures, puisque les variables sont séparées; la solution se présente ainsi sous la forme

$$F(x) \pm F(y) = \text{const}.$$

$F(x)$ et $F(y)$ étant des fonctions *transcendantes*. Euler a observé que la solution générale de (1) peut aussi se mettre sous une forme *algébrique* par rapport à x et y; et, de la comparaison des deux formes de la solution, il a déduit un théorème d'addition, par la voie suivie au n° **246**.

289. Intégration algébrique. — Pour intégrer algébriquement l'équation (1), nous ferons appel à la propriété suivante, énoncée dans la Note du n° **227** : si S désigne une conique, représentée paramétriquement en t, par des équations du type

$$x = \frac{a_1 t^2 + b_1 t + c_1}{a_3 t^2 + b_3 t + c_3}, \qquad y = \frac{a_2 t^2 + b_2 t + c_2}{a_3 t^2 + b_3 t + c_3},$$

et si T est une seconde conique, coupant S en quatre points dont les arguments sont les racines d'une équation du quatrième degré $T(t) = 0$, une tangente quelconque de T rencontre S en deux points, dont les arguments t', t'', et leurs différentielles quand la tangente varie, sont liés par l'équation [1]

$$(2) \qquad \frac{dt'}{\sqrt{T(t')}} \pm \frac{dt''}{\sqrt{T(t'')}} = 0.$$

---

[1] En raison de l'importance de cette relation, nous croyons utile d'en donner ici une démonstration plus directe que celle du n° 227.

En coordonnées homogènes, x, y, z, l'équation de T, si l'on rapporte cette conique à deux tangentes et à la corde des contacts, peut s'écrire :

$$(1) \qquad T = B^2 - AC = 0,$$

A, B, C étant linéaires et homogènes en x, y, z. L'équation d'une tangente quelconque de cette courbe sera

$$(2) \qquad \lambda^2 A + 2\lambda B + C = 0,$$

λ désignant un paramètre variable : car l'enveloppe des droites (2) est évidemment la conique (1).

La droite (2) coupe S en deux points, dont les arguments t sont les racines

Cette équation différentielle est, entre t' et t'', l'équation générale d'Euler. D'après ce qui précède, on en obtiendra une solution en écrivant que la droite qui joint les deux points d'arguments t' et t'', sur la conique S, touche une conique T, coupant S aux quatre points dont les arguments annulent le polynome du quatrième ordre $T(t)$. L'équation de cette conique T contient une constante arbitraire, puisque les coniques menées par quatre points sont en nombre simplement infini : la relation obtenue ainsi entre t' et t'' renfermera donc une constante arbitraire, et sera dès lors l'intégrale générale de (2). D'ailleurs toutes les opérations à effectuer étant algébriques, l'intégrale sera algébrique en t' et t''.

---

de l'équation

$$(3) \qquad \lambda^2 A(t) + 2\lambda B(t) + C(t) = 0,$$

$A(t)$, ... désignant ce que deviennent A, ... quand on y remplace x, y, z par $a_1 t^2 + b_1 t + c_1$, $a_2 t^2 + \ldots$, $a_3 t^2 + \ldots$.

Soient t' et t'' les deux racines de (3); si l'on fait varier infiniment peu la tangente (2) en remplaçant λ par $\lambda + d\lambda$, t' et t'' éprouvent des variations dt' et dt'' qu'on obtient en différentiant (3). On trouve ainsi, en désignant par $f(t)$ le premier membre de (3),

$$dt' f'(t') + 2 d\lambda[\lambda A(t') + B(t')] = 0,$$
$$dt'' f'(t'') + 2 d\lambda[\lambda A(t'') + B(t'')] = 0,$$

d'où

$$(4) \qquad \frac{dt'}{\lambda A(t') + B(t')} + \frac{dt''}{\lambda A(t'') + B(t'')} = -2 d\lambda \left[\frac{1}{f'(t')} + \frac{1}{f'(t'')}\right].$$

Or $f(t) = a(t - t')(t - t'')$, a étant une constante par rapport à t, et l'on en conclut de suite que $f'(t') + f'(t'')$ est nul identiquement. Donc, en vertu de (4),

$$(5) \qquad \frac{dt'}{\lambda A(t') + B(t')} + \frac{dt''}{\lambda A(t'') + B(t'')} = 0.$$

Mais, d'après l'équation (3), que vérifient t' et t'', on a

$$\lambda A(t') + B(t') = \pm\sqrt{B^2(t') - A(t')C(t')},$$
$$\lambda A(t'') + B(t'') = \pm\sqrt{B^2(t'') - A(t'')C(t'')},$$

et comme d'ailleurs $B^2(t) - A(t)C(t)$ n'est autre chose, par (1), que $T(t)$, l'équation (5) s'écrit :

$$\frac{dt'}{\sqrt{T(t')}} \pm \frac{dt''}{\sqrt{T(t'')}} = 0. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

290. Cette méthode permet de choisir à volonté la conique S et sa représentation paramétrique, à chaque choix correspondra une forme algébrique différente de la solution de l'équation d'Euler, ces formes étant d'ailleurs équivalentes entre elles.

Prenons par exemple pour S la parabole $y = x^2$, représentée paramétriquement par les équations

$$x = t, \qquad y = t^2.$$

La droite qui joint les points d'arguments t' et t'' sur cette courbe a pour équation :

$$y = x(t' + t'') - t't'',$$

ou, en posant pour abréger $t' + t'' = s$, $t't'' = p$,

$$(3) \qquad y = sx - p.$$

Les quatre points de la parabole dont les arguments sont racines de l'équation

$$T(t) = At^4 + 2Bt^3 + Ct^2 + 2Dt + E = 0$$

sont évidemment sur la conique

$$Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + 2Dx + E = 0\,(^1);$$

donc l'équation générale des coniques T, menées par ces quatre points, est

$$(4) \qquad Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + 2Dx + E + 2\lambda(x^2 - y) = 0,$$

λ étant un paramètre arbitraire. D'après ce qui précède, la solution de l'équation d'Euler (2) s'obtiendra en écrivant que la droite (3) touche la conique (4), c'est-à-dire en exprimant que l'équation aux x des points de rencontre a une racine double. Cette équation étant

$$\begin{aligned} &x^2(As^2 + 2Bs + C + 2\lambda) \\ &- 2x(Asp + Bp - D + \lambda s) + Ap^2 + 2\lambda p + E = 0, \end{aligned}$$

la relation cherchée entre t' et t'', ou entre s et p, sera

$$(Asp + Bp - D + \lambda s)^2 - (As^2 + 2Bs + C + 2\lambda)(Ap^2 + 2\lambda p + E) = 0,$$

(1) Car en faisant dans l'équation de la conique $x = t$, $y = t^2$, on retrouve l'équation $T(t) = 0$.

et, si l'on ordonne par rapport à la constante arbitraire λ,

$$(5)\left\{\begin{aligned}&\lambda^2(s^2-4p)-2\lambda(Ap^2+Bsp+Cp+Ds+E)\\&+(B^2-AC)p^2-2ADsp-AEs^2-2BDp-2BEs+D^2-CE=0.\end{aligned}\right.$$

Telle est, en supposant s et p remplacés par $t'+t''$ et $t't''$, l'intégrale générale, sous forme algébrique, de l'équation d'Euler (2).

291. Autres formes de l'intégrale algébrique. — Résolvons l'équation (5) par rapport à la constante λ; nous avons

$$\lambda=\frac{Ap^2+Bsp+Cp+Ds+E\pm\sqrt{\mathfrak{F}(s,p)}}{s^2-4p},$$

ce qui est une nouvelle forme de l'intégrale (5). La quantité sous le radical $\mathfrak{F}(s,p)$ est un polynome en s et p, et par suite en t' et t''; elle a une expression remarquable, qu'on pourrait découvrir *a priori* sans calcul, mais que nous nous bornerons à indiquer, en laissant au lecteur le soin de la vérifier.

On a, d'après (5),

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}(s,p)=(Ap^2+Bsp+Cp+Ds+E)^2&\\-(s^2-4p)[(B^2-AC)p^2-2ADsp&\\-AEs^2-2BDp-2BEs+D^2-CE]&\end{aligned}$$

et, en remplaçant p et s par $t't''$ et $t'+t''$, on reconnaît aisément que le second membre est égal au produit $T(t')T(t'')$. On a donc

$$(6)\qquad \lambda=\frac{Ap^2+Bsp+Cp+Ds+E\pm\sqrt{T(t')\,T(t'')}}{s^2-4p},$$

relation qu'on peut encore simplifier.

Multiplions en effet les deux membres de (6) par 2; retranchons et ajoutons au numérateur du second membre la quantité $T(t')+T(t'')$; nous trouvons :

$$2\lambda=\frac{-T(t')-T(t'')+2Ap^2+2Bsp+2Cp+2Ds+2E+\left[\sqrt{T(t')}\pm\sqrt{T(t'')}\right]^2}{s^2-4p}.$$

Or, en remplaçant $T(t')$ et $T(t'')$ par leurs expressions $At'^4+\ldots$, $At''^4+\ldots$, on trouve sans difficulté

$$\begin{aligned}&-T(t')-T(t'')+2Ap^2+2Bsp+2Cp+2Ds+2E\\&=-A(t'^2-t''^2)^2-2Bs(t'-t'')^2-C(t'-t'')^2,\end{aligned}$$

et, comme le dénominateur de 2λ, à savoir $s^2 - 4p$, est égal à

$$(t' + t'')^2 - 4t't'',$$

c'est-à-dire à $(t' - t'')^2$, il vient

$$(7) \quad 2\lambda = -A(t'+t'')^2 - 2B(t'+t'') - C + \left[\frac{\sqrt{T(t')} \pm \sqrt{T(t'')}}{t'-t''}\right]^2,$$

forme classique, due à Lagrange, de l'intégrale de l'équation d'Euler (2).

292. Application. — Soit le polynome $T(t) = 4t^3 - g_2 t - g_3$; l'équation d'Euler (2)

$$\frac{dt'}{\sqrt{4t'^3 - g_2 t' - g_3}} + \frac{dt''}{\sqrt{4t''^3 - g_2 t'' - g_3}} = 0$$

s'écrit, si l'on y pose $t' = p(u, g_2, g_3)$, $t'' = p(v, g_2, g_3)$,

$$du + dv = 0,$$

d'où, l'intégrale générale

$$(8) \qquad C = u + v.$$

Une autre forme de l'intégrale est fournie par l'équation (7), où l'on fait

$$A = C = 0, \qquad B = 2, \qquad t' = pu, \qquad t'' = pv,$$

c'est-à-dire

$$(9) \qquad 2\lambda = -4(pu + pv) + \left(\frac{p'u \pm p'v}{pu - pv}\right)^2,$$

λ désignant la constante arbitraire. D'après le n° 245, les seconds membres de (8) et de (9) sont fonctions l'un de l'autre, c'est-à-dire qu'on a

$$(10) \qquad -pu - pv + \frac{1}{4}\left(\frac{p'u \pm p'v}{pu - pv}\right)^2 = \varphi(u + v).$$

Pour déterminer la fonction inconnue φ, on donne à v une valeur très petite et l'on développe le premier membre suivant les

puissances croissantes de v. Il vient :

$$-pv = -\frac{1}{v^2} - C_1 v^2 + \ldots,$$

$$\frac{p'u \pm p'v}{pu - pv} = \frac{p'u \mp \frac{2}{v^3} \pm 2C_1 v + \ldots}{pu - \frac{1}{v^2} - C_1 v^2 + \ldots} = \frac{1}{v}\left(\frac{\mp 2 + p'u\, v^3 \pm 2C_1 v^4 + \ldots}{-1 + pu\, v^2 - C_1 v^4 + \ldots}\right)$$

$$= \frac{1}{v}(\pm 2 \pm 2v^2 pu + \ldots),$$

et, par suite,

$$-pu - pv + \frac{1}{4}\left(\frac{p'u \pm p'v}{pu - pv}\right)^2$$

$$= -pu - \frac{1}{v^2} - C_1 v^2 + \ldots + \frac{1}{v^2} + 2pu + \ldots = pu + \ldots,$$

les termes non écrits s'annulant pour $v = 0$. Donc, à la limite, pour $v = 0$, l'équation (10) donne

$$\varphi(u) = pu,$$

et cette équation (10) s'écrit par suite :

$$p(u+v) + pu + pv = \frac{1}{4}\left(\frac{p'u \pm p'v}{pu - pv}\right)^2.$$

Il faut prendre, au second membre, le signe —, parce que, pour $u = v$, le premier membre reste fini et que, dès lors, le second doit l'être également : finalement, on retrouve ainsi la formule d'addition de pu, à savoir

$$p(u+v) + pu + pv = \frac{1}{4}\left(\frac{p'u - p'v}{pu - pv}\right)^2.$$

C'est par ce procédé qu'Euler, puis Legendre, ont obtenu la formule d'addition de la fonction *sn u*.

CHAPITRE II.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES D'ORDRE QUELCONQUE.

I. — CAS DE RÉDUCTIBILITÉ DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

---

293. — *Il n'y a pas de méthode* pour intégrer une équation différentielle générale d'ordre n; on ne peut que signaler certains cas où il est possible de *réduire l'ordre de l'équation,* c'est-à-dire la ramener à une autre, d'ordre inférieur.

294. Premier cas. — *La fonction inconnue et ses $k-1$ premières dérivées ne figurent pas dans l'équation,* qui est dès lors de la forme

$$f\left(x, \frac{d^k y}{dx^k}, \ldots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0.$$

Il suffit évidemment de prendre pour nouvelle inconnue $\frac{d^k y}{dx^k} = u$, et l'on a

$$f\left(x, u, \frac{du}{dx}, \ldots, \frac{d^{n-k} u}{dx^{n-k}}\right) = 0,$$

équation dont l'ordre est inférieur de k unités à celui de la proposée. Si on peut l'intégrer, on aura $\frac{d^k y}{dx^k} = u(x)$, d'où

$$\frac{d^{k-1} y}{dx^{k-1}} = \int u\, dx,$$

$$\frac{d^{k-2} y}{dx^{k-2}} = \int dx \int u\, dx, \quad \ldots, \text{ etc.}$$

L'inconnue y s'obtiendra donc par k quadratures successives, introduisant chacune une nouvelle constante; avec les $n-k$ constantes que renferme u, on aura bien les n constantes requises pour l'intégrale générale y.

On peut d'ailleurs remplacer les k quadratures successives par une seule.

Soit, en effet, d'une manière générale, à intégrer l'équation

$$\text{(1)} \qquad \frac{d^m Y}{dx^m} = \varphi(x).$$

Considérons la fonction

$$y = \frac{1}{(m-1)!}\int_0^x \varphi(z)(x-z)^{m-1}dz;$$

je dis qu'elle vérifie (1). En effet, en appliquant la règle de dérivation sous le signe $\int$, on a :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(m-2)!}\int_0^x \varphi(z)(x-z)^{m-2}dz + \frac{1}{(m-1)!}[\varphi(z)(x-z)^{m-1}]_{z=x}.$$

Le second terme est nul, et l'on a de même :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{(m-3)!}\int_0^x \varphi(z)(x-z)^{m-3}dz,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} = \int_0^x \varphi(z)\,dz,$$

$$\frac{d^m y}{dx^m} = \varphi(x),$$

ce qui établit la proposition.

Si, maintenant, on désigne par Y l'intégrale générale de (1) et qu'on pose :

$$Y = y + u,$$

u étant l'inconnue nouvelle, on aura :

$$\frac{d^m y}{dx^m} + \frac{d^m u}{dx^m} = \varphi(x), \qquad \text{d'où} \qquad \frac{d^m u}{dx^m} = 0,$$

et, par suite,

$$u = C_1 x^{m-1} + C_2 x^{m-2} + \ldots + C_{m-1}x + C_m,$$

les C étant les constantes arbitraires; l'intégrale générale de (1) est donc

$$Y = \frac{1}{(m-1)!}\int_0^x \varphi(z)(x-z)^{m-1}dz + P_{m-1}(x),$$

$P_{m-1}(x)$ étant un polynome arbitraire en x, d'ordre $m-1$.

295. Deuxième cas. — *La variable x ne figure pas dans l'équation*

$$(2) \qquad f\left(y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0.$$

On ramène ce cas au précédent en prenant x comme inconnue et y comme variable, car on obtient ainsi une équation où l'inconnue ne figure pas. Les formules qui expriment les dérivées de y par rapport à x, en fonction des dérivées de x par rapport à y, se trouvent aisément; il suffit d'observer que $\frac{dy}{dx}$, c'est-à-dire y', est l'inverse de $\frac{dx}{dy}$, c'est-à-dire x' (Tome I, n° 102). On a ainsi

$$y' = \frac{1}{x'},$$

$$y'' = \frac{d}{dx}y' = \left(\frac{d}{dy}y'\right) \times \frac{dy}{dx} = \left(\frac{d}{dy}\frac{1}{x'}\right) \times \frac{1}{x'} = -\frac{x''}{x'^2}\frac{1}{x'} = \frac{-x''}{x'^3},$$

$$y''' = \frac{d}{dx}y'' = \frac{1}{x'}\frac{d}{dy}\left(\frac{-x''}{x'^3}\right) = \frac{-x'x''' + 3x''^2}{x'^5},$$

. . . .

Autre méthode. — On prend y comme variable et $\frac{dy}{dx}$ comme inconnue. Posons donc

$$\frac{dy}{dx} = p,$$

et cherchons à exprimer $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\dots$ en fonction de p, $\frac{dp}{dy}$, $\dots$. On a

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{\left(\frac{dy}{p}\right)} = p\frac{dp}{dy},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(p\frac{dp}{dy}\right) = p\frac{d}{dy}\left(p\frac{dp}{dy}\right) = p^2\frac{d^2p}{dy^2} + p\left(\frac{dp}{dy}\right)^2,$$

et ainsi de suite; $\frac{d^ny}{dx^n}$ s'exprimera en fonction de p et de ses $(n-1)$ premières dérivées par rapport à y. Portant ces valeurs dans la proposée (2), on aura une équation d'ordre $(n-1)$ en p; si on peut l'intégrer, soit

$$p = \varphi(y)$$

sa solution générale, renfermant $n-1$ constantes : on aura

$$dx = \frac{dy}{p}, \qquad \text{d'où} \qquad x = \int \frac{dy}{\varphi(y)} + \text{const.},$$

ce qui donne l'intégrale générale de (2) avec les n constantes nécessaires.

296. Troisième cas. — *L'équation est homogène par rapport à y et à ses dérivées*, c'est-à-dire ne change pas (à un facteur près) si l'on remplace y par λy, x étant inaltéré et λ désignant une constante.

On posera

$$y = e^z,$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = e^z \frac{dz}{dx},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = e^z \left[\frac{d^2z}{dx^2} + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right], \qquad \cdots$$

Substituons ces valeurs dans la proposée: e^z sera en facteur dans tous les termes, à une certaine puissance, en raison de l'homogénéité; après suppression de ce facteur, *l'équation ne contiendra plus z*, car, dans y et ses dérivées, z ne figure que sous la forme e^z. On trouvera ainsi une relation de la forme

$$f\left(x, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2z}{dx^2}, \ldots, \frac{d^nz}{dx^n}\right) = 0,$$

équation d'ordre $n-1$ par rapport à $\frac{dz}{dx}$.

297. Quatrième cas. — *L'équation est homogène par rapport à $x, y, dx, d^2y, \ldots, d^ny$*, c'est-à-dire ne change pas quand on remplace x par λx et y par λy : c'est une généralisation des équations homogènes du premier ordre. Pour intégrer, on change d'inconnue en posant

$$y = ux,$$

u étant l'inconnue nouvelle, et l'on forme l'équation différentielle à laquelle satisfait u.

Or, quand on remplace x par λx et y par λy, u reste inaltéré;

donc l'équation différentielle en u ne changera pas quand on remplacera x par λx, u restant inaltéré : si dès lors on prend u pour variable et x pour inconnue, l'équation différentielle en x sera homogène par rapport à x et à ses dérivées, ce qui est le troisième cas de réduction.

II. — APPLICATIONS.

298. C'est surtout pour les *équations différentielles du second ordre* que les procédés ci-dessus de réduction sont importants; dans les cas où ils sont applicables, ils conduisent à des équations du premier ordre, qu'on peut parfois intégrer, ainsi que la Mécanique en présente de nombreux exemples. On donnera ici d'autres exemples empruntés à des problèmes géométriques.

299. Courbe élastique. — *Trouver une courbe plane (passant par l'origine) dont le rayon de courbure soit inversement proportionnel à l'ordonnée.*

L'équation du problème est

$$\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2y}{a^2}; \tag{1}$$

elle ne contient pas x (second cas de réduction); on posera donc

$$y' = p, \qquad y'' = p\frac{dp}{dy},$$

et la proposée deviendra

$$\frac{p\,dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2y}{a^2}\,dy.$$

Les variables sont séparées; intégrons : il vient

$$-\frac{1}{(1+p^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{y^2-C}{a^2}, \qquad \text{(C constante arbitraire)}, \tag{2}$$

d'où

$$p = \frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{a^4 - (y^2 - C)^2}{(y^2 - C)^2}},$$
$$dx = \frac{(y^2 - C)\,dy}{\sqrt{a^4 - (y^2 - C)^2}};$$

on est ramené à une différentielle elliptique, le polynome sous le radical est bicarré. Posons alors, pour réduire le polynome au troisième ordre,

(3) $$y^2 - C = -u,$$

d'où

$$dx = \pm \frac{u\,du}{2\sqrt{(u - C)(u^2 - a^4)}}.$$

On introduit les fonctions elliptiques en posant

$$u = pv + \frac{1}{3}C, \quad \begin{cases} e_\alpha = C - \frac{1}{3}C = \frac{2}{3}C, \\ e_\beta = \quad a^2 - \frac{1}{3}C, \\ e_\gamma = -a^2 - \frac{1}{3}C, \end{cases}$$

d'où, en intégrant,

(4) $$\pm x = \int \left(pv + \frac{1}{3}C\right) dv = -\zeta v + \frac{C}{3}v + C'.$$

Joignons-y l'équation (3),

$$y = \sqrt{C - u} = \sqrt{\frac{2}{3}C - pv} = \sqrt{e_\alpha - pv},$$

nous avons x et y exprimés en fonction d'un paramètre, v, ce qui définit la courbe cherchée.

Écrivons que la courbe passe par l'origine, c'est-à-dire que $x = 0$, pour $y = 0$; y s'annule pour $v = \omega_\alpha$, on aura donc

$$0 = -\zeta\omega_\alpha + \frac{C}{3}\omega_\alpha + C',$$

ce qui détermine la constante C', et, par suite,

$$\pm x = -(\zeta v - \zeta\omega_\alpha) + \frac{C}{3}(v - \omega_\alpha),$$
$$y = \sqrt{e_\alpha - pv}.$$

Il est maintenant plus simple de prendre pour paramètre $v - \omega_\alpha$, c'est-à-dire de poser $v = t + \omega_\alpha$; en appliquant les formules $p(t + \omega_\alpha)$ du n° 199 et $\zeta(t + \omega_\alpha)$ du n° 197, on trouve

$$\pm x = -\zeta t - \frac{1}{2}\frac{p't}{pt - e_\alpha} + \frac{C}{3}t,$$

$$y = \sqrt{\frac{(e_\alpha - e_\gamma)(e_\beta - e_\alpha)}{pt - e_\alpha}} = \sqrt{\frac{(a^2 + C)(a^2 - C)}{pt - e_\alpha}} = \frac{\sqrt{(a^2 + C)(a^2 - C)}}{\sigma_{\alpha 0}(t)}.$$

On peut prendre devant x le signe $+$; le signe $-$ donnerait la courbe symétrique par rapport à Oy; de même pour y.

Ces formules permettent la discussion de la forme de la courbe; nous laissons au lecteur le soin de la pousser jusqu'au bout, en faisant varier t, par valeurs réelles, de $-\infty$ à $+\infty$.

300. Problème. — *Trouver une courbe plane telle que les tangentes de ses diamètres, aux points où ceux-ci coupent la courbe, concourent en un même point (Origine des coordonnées).*

On a établi (Tome I, n° 72) qu'en un point x, y d'une courbe C, la tangente à la courbe diamétrale qui passe par ce point a pour coefficient angulaire

$$y' - 3\frac{y''^2}{y'''},$$

y', y'', y''' étant les valeurs, au point x, y, des dérivées de l'ordonnée, y, de la courbe C, regardée comme fonction de l'abscisse x.

Pour que la tangente considérée passe par l'origine, il faut et il suffit que son coefficient angulaire soit $\frac{y}{x}$; l'équation différentielle de la courbe C est donc

$$\frac{y}{x} = y' - 3\frac{y''^2}{y'''},$$

ou

$$(5) \qquad \frac{d^3y}{dx^3}\left(x\frac{dy}{dx} - y\right) - 3x\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 = 0.$$

C'est une équation homogène par rapport à y et à ses dérivées (Troisième cas de réduction); elle est également homogène par rapport à x, y, dx, dy, d^2y, d^3y (Quatrième cas): nous engageons le lecteur à en essayer l'intégration en appliquant les

méthodes générales indiquées plus haut; il sera plus court de procéder comme il suit.

Mettons l'équation proposée sous la forme

$$\frac{y'''}{y''} = 3\frac{xy''}{xy'-y}.$$

Le premier membre est la dérivée, par rapport à x, de $\log y''$; le second, celle de $3\log(xy'-y)$: on a donc, en intégrant,

$$y'' = -C(xy'-y)^3,$$

ou

$$\frac{xy''}{(xy'-y)^3} = -Cx.$$

Le premier membre étant la dérivée de $-\frac{1}{2}(xy'-y)^{-2}$, on en conclut

$$\frac{1}{2}\frac{1}{(xy'-y)^2} = \frac{1}{2}Cx^2 + \frac{1}{2}C',$$

d'où

$$\frac{xy'-y}{x^2} = \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{1}{Cx^2+C'}},$$

et, en remontant encore aux primitives,

$$\frac{y}{x} = \int\frac{dx}{x^2}\sqrt{\frac{1}{Cx^2+C'}} = -\frac{1}{C'}\left[\frac{\sqrt{Cx^2+C'}}{x} + C''\right],$$

c'est-à-dire

$$(C'y + C''x)^2 - Cx^2 - C' = 0.$$

C'est l'équation d'une conique, quelconque d'ailleurs, ayant l'origine pour centre. Cette solution était évidente *a priori*; notre analyse montre qu'elle est la seule.

301. Problème. — *Trouver une courbe plane pour laquelle le rayon de courbure en chaque point soit proportionnel au rayon vecteur du même point.*

En coordonnées polaires, ρ désignant le rayon vecteur, et ρ', ρ'' ses dérivées première et seconde par rapport à l'angle polaire, ω, l'équation différentielle de la courbe cherchée sera, d'après l'ex-

pression classique du rayon de courbure (Tome I, n° **62**),

$$(6)\qquad \frac{(\rho^2+\rho'^2)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2+2\rho'^2-\rho\rho''} = m\rho.$$

Cette équation, ne contenant pas ω, rentre dans le second cas de réduction; elle rentre aussi dans le troisième, puisqu'elle est homogène en ρ, ρ', ρ''. Nous choisirons la méthode de réduction du troisième cas, en posant

$$(7)\qquad \rho = e^u; \quad \text{d'où} \quad \rho' = e^u u'; \quad \rho'' = e^u(u''+u'^2);$$

et l'équation proposée deviendra

$$\frac{(1+u'^2)^{\frac{3}{2}}}{1+u'^2-u''} = m,$$

relation qui ne contient pas u. On y posera donc (Premier cas)

$$(8)\qquad u' = \frac{du}{d\omega} = z; \qquad u'' = \frac{dz}{d\omega},$$

et l'on aura, en séparant les variables z et ω,

$$(9)\qquad \frac{m\,dz}{m(1+z^2)-(1+z^2)^{\frac{3}{2}}} = d\omega,$$

d'où

$$(9\ bis)\qquad \omega-\omega_0 = \int \frac{m\,dz}{m(1+z^2)-(1+z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Il est inutile, pour le moment, d'effectuer la quadrature; on a, en effet, par (8) et (9),

$$du = z\,d\omega = \frac{mz\,dz}{m(1+z^2)-(1+z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

et, par suite,

$$u = \int \frac{mz\,dz}{m(1+z^2)-(1+z^2)^{\frac{3}{2}}} + \log C.$$

Enfin (7) donne

$$\rho = e^u = Ce^{\int \frac{mz\,dz}{m(1+z^2)-(1+z^2)^{\frac{3}{2}}}}$$

et (9 *bis*) s'écrit

$$\omega = \omega_0 + \int \frac{m\,dz}{m(1+z^2)-(1+z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Ces deux dernières relations donnent ρ et ω exprimés en fonction d'un paramètre, z, ce qui définit la courbe cherchée.

On peut pousser les calculs plus loin; posons, en effet, dans les expressions de ρ et ω, $1 + z^2 = v^2$; il vient

$$\rho = C e^{\int m \frac{v\,dv}{mv^2 - v^3}} = C e^{\int dv\left(\frac{1}{v} + \frac{1}{m-v}\right)} = C \frac{v}{m - v},$$

$$\omega = \omega_0 + \int \frac{m\,dv}{(mv - v^2)\sqrt{v^2 - 1}}.$$

Tirons v, en fonction de ρ, de la première de ces relations et portons dans la seconde; nous obtenons finalement, pour équation de la courbe en ω et ρ,

$$\omega = \omega_0 + \int \frac{(C+\rho)\,d\rho}{\rho\sqrt{\rho^2 m^2 - (C+\rho)^2}}.$$

La spirale logarithmique, qui est une solution du problème (Tome I, n° 383), correspond à $C = 0$.

302. Courbe de poursuite. — Un mobile, M_0, parcourt l'axe des x d'un mouvement uniforme, avec une vitesse v_0; un second mobile, M, primitivement en dehors de cet axe, se meut dans le plan avec une vitesse uniforme v, en se dirigeant à chaque instant vers la position qu'occupe M_0 au même instant. On demande la trajectoire de M (*Courbe de poursuite*).

Soient x, y les coordonnées de M à l'instant t, le temps étant compté à partir du passage de M_0 à l'origine; on a, en écrivant que la vitesse de M est égale à v, et que la tangente en M à la trajectoire [1] passe par le point d'abscisse $v_0 t$ sur Ox,

$$(10) \qquad \sqrt{dx^2 + dy^2} = v\,dt, \qquad -y = \frac{dy}{dx}(v_0 t - x).$$

---

(1) A savoir la droite $Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x)$.

Pour obtenir une relation différentielle entre x et y, il faut éliminer t : à cet effet résolvons la seconde équation par rapport à $v_0 t$,

$$v_0 t = x - \frac{y}{y'}, \qquad \left(y' = \frac{dy}{dx}\right),$$

différentions

$$v_0 dt = dx\left(1 - \frac{y'^2 - yy''}{y'^2}\right) = dx\frac{yy''}{y'^2},$$

et portons cette valeur de dt dans la première relation (10); nous avons

$$\sqrt{1+y'^2} = \frac{v}{v_0}\frac{yy''}{y'^2},$$

équation qui ne contient pas x (Deuxième cas). Nous l'intégrerons ici en l'écrivant

$$(11) \qquad \frac{y''}{y'\sqrt{1+y'^2}} = k\frac{y'}{y}, \qquad \left(k = \frac{v_0}{v}\right),$$

et en observant que le premier membre est la dérivée d'une fonction de y' facile à trouver. En effet, l'intégrale

$$\int \frac{du}{u\sqrt{1+u^2}} \quad \text{ou} \quad \int \frac{u\,du}{u^2\sqrt{1+u^2}}$$

se calcule par le changement de variable $1 + u^2 = z^2$, et devient

$$(12) \qquad \int \frac{dz}{z^2-1} = \frac{1}{2}\log\frac{z-1}{z+1} = \frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{1+u^2}-1}{\sqrt{1+u^2}+1};$$

le premier membre de (11) est donc la dérivée, par rapport à x, du dernier membre de (12), où u est remplacé par y'. On a, dès lors, en remontant aux primitives des deux membres de (11),

$$\frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{1+y'^2}-1}{\sqrt{1+y'^2}+1} = k\log y + \frac{1}{2}\log C,$$

d'où

$$\frac{\sqrt{1+y'^2}-1}{\sqrt{1+y'^2}+1} = Cy^{2k} \qquad \text{ou} \qquad \sqrt{1+y'^2} = \frac{1+Cy^{2k}}{1-Cy^{2k}}.$$

Résolvons par rapport à y'^2, nous avons

$$y'^2 = \frac{4Cy^{2k}}{(1-Cy^{2k})^2}, \qquad y' = 2\sqrt{C}\frac{y^k}{1-Cy^{2k}},$$

le radical $\sqrt{C}$ comportant le signe $\pm$. Séparons les variables x et y :

$$dy(y^{-k} - Cy^{k}) = 2\sqrt{C}\,dx,$$

d'où, par intégration, en supposant k différent de l'unité,

$$\frac{1}{1-k}y^{1-k} - \frac{C}{1+k}y^{1+k} = 2\sqrt{C}x + C'. \tag{13}$$

C'est l'équation de la trajectoire cherchée; on déterminera les constantes C et C' par les conditions initiales ([1]).

III. — LIGNES GÉODÉSIQUES.

---

303. **Définition.** — On a appelé *lignes géodésiques* d'une surface (Tome I, n° 431), les lignes, tracées sur cette surface, dont le plan osculateur en chaque point est normal à la surface au même point.

Elles jouissent d'une importante propriété : le plus court chemin entre deux points, sur la surface, est une géodésique. La démonstration rigoureuse nécessite l'emploi du calcul des variations, mais on va établir que, *si le plus court chemin existe, ce ne peut être qu'une ligne géodésique.*

En effet, la ligne qui est le plus court chemin entre deux points de la surface est aussi le plus court chemin entre deux points quelconques pris sur la ligne; en particulier entre deux points infiniment voisins M et M'. Mais on a (Tome I, n° 401)

$$\text{arc } MM' - \text{corde } MM' = \frac{1}{24}k^2(\text{corde } MM')^3,$$

en se bornant à la valeur principale : k désigne la courbure de la ligne au point M. On voit ainsi que, les points M et M' étant donnés, l'arc MM' sera minimum lorsque k sera minimum, c'est-

---

([1]) Pour $t = 0$, le point M_0 est à l'origine, et M a une position donnée (x_0, y_0) dans le plan. On écrira donc que la courbe (13) passe par x_0, y_0, et que sa tangente en ce point passe par l'origine.

à-dire lorsque le rayon de courbure $\left(\frac{1}{k}\right)$ sera maximum. Or le rayon de courbure en M d'une ligne tracée sur la surface étant, d'après le théorème de Meusnier, la projection sur le plan osculateur du rayon de courbure de la section normale menée par la même tangente, il en résulte que, pour une tangente donnée MM', le maximum de $\frac{1}{k}$ aura lieu lorsque le plan osculateur contiendra la normale [1]. C. Q. F. D.

304. Équation différentielle des géodésiques. — Cette équation, pour une surface donnée paramétriquement,

$$(1)\qquad x = x(u, v), \qquad y = y(u, v), \qquad z = z(u, v),$$

s'obtient comme il suit. Une ligne tracée sur la surface est définie par les équations (1) où l'on regarde u et v comme fonctions d'une même variable, t; le plan osculateur en un point x, y, z de la ligne a pour équation

$$0 = \begin{vmatrix} X - x & x' & x'' \\ Y - y & y' & y'' \\ Z - z & z' & z'' \end{vmatrix},$$

ou

$$0 = \begin{vmatrix} X - x & dx & d^2x \\ Y - y & dy & d^2y \\ Z - z & dz & d^2z \end{vmatrix}.$$

dx, d^2x, ... étant les différentielles premières et secondes de x, y, z, quand la variable indépendante est t. On a d'ailleurs

$$(2)\qquad \begin{cases} dx = \dfrac{\partial x}{\partial u} du + \dfrac{\partial x}{\partial v} dv, \\ d^2x = \dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2} du^2 + 2\dfrac{\partial^2 x}{\partial u\, \partial v} du\, dv + \dfrac{\partial^2 x}{\partial v^2} dv^2 + \dfrac{\partial x}{\partial u} d^2u + \dfrac{\partial x}{\partial v} d^2v. \end{cases}$$

Écrivons que le plan osculateur contient la normale

$$\frac{X - x}{A} = \frac{Y - y}{B} = \frac{Z - z}{C},$$

---

[1] Cette élégante démonstration est due à Joseph Bertrand. Il résulte de la propriété de plus courte distance qu'un fil, tendu *sur la surface* entre deux points, marque une géodésique.

(notations du Tome I, n° **408**), c'est-à-dire qu'il lui est parallèle; nous avons l'équation

$$(3)\qquad \begin{vmatrix} A & dx & d^2x \\ B & dy & d^2y \\ C & dz & d^2z \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation se met sous une autre forme : multiplions les lignes respectivement par $\frac{dx}{du}, \frac{dy}{du}, \frac{dz}{du}$ et ajoutons; nous obtenons, puisque $A\frac{\partial x}{\partial u} + B\frac{\partial y}{\partial u} + C\frac{\partial z}{\partial u}$ est nul (Tome I, n° **408**), la ligne nouvelle

$$0,\quad dx\frac{\partial x}{\partial u} + dy\frac{\partial y}{\partial u} + dz\frac{\partial z}{\partial u},\quad d^2x\frac{\partial x}{\partial u} + d^2y\frac{\partial y}{\partial u} + d^2z\frac{\partial z}{\partial u},$$

qui peut remplacer une de celles du déterminant. De même, en multipliant par $\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}$ et ajoutant, nous obtenons la ligne

$$0,\quad dx\frac{\partial x}{\partial v} + dy\frac{\partial y}{\partial v} + dz\frac{\partial z}{\partial v},\quad d^2x\frac{\partial x}{\partial v} + d^2y\frac{\partial y}{\partial v} + d^2z\frac{\partial z}{\partial v}.$$

L'équation (3) s'écrit donc, à un facteur près,

$$(3\,bis)\qquad \begin{vmatrix} A & dx & d^2x \\ 0 & dx\frac{\partial x}{\partial u} + dy\frac{\partial y}{\partial u} + dz\frac{\partial z}{\partial u} & d^2x\frac{\partial x}{\partial u} + \ldots \\ 0 & dx\frac{\partial x}{\partial v} + \ldots & d^2x\frac{\partial x}{\partial v} + \ldots \end{vmatrix} = 0,$$

ce qui donne finalement, pour l'équation cherchée, le mineur encadré, égalé à zéro.

Or, rappelons-nous les notations du Tome I (n° **412**) :

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v},$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2;$$

nous pouvons écrire (3 *bis*), en remplaçant dx, ..., d^2x, ...

par leurs valeurs (2),

$$o=\begin{vmatrix} E\,du+F\,dv & E\,d^2u+F\,d^2v+du^2\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\right)+2\,du\,dv\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}\right)+dv^2\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}\right) \\ F\,du+G\,dv & F\,d^2u+G\,d^2v+dv^2\left(\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}\right)+2\,du\,dv\left(\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}\right)+du^2\left(\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\right)\end{vmatrix},$$

en écrivant $\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\right)$ pour la somme $\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}$; etc.

Or, on a évidemment

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\right)=\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u},\qquad \left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}\right)=\frac{1}{2}\frac{dE}{dv},$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}\right)=\frac{\partial F}{\partial v}-\left(\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}\right)=\frac{\partial F}{\partial v}-\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u},\quad \text{etc.},$$

ce qui donne, pour équation finale,

$$o=\begin{vmatrix} E\,du+F\,dv & E\,d^2u+F\,d^2v+\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u}du^2+\frac{\partial E}{\partial v}du\,dv+\left(\frac{\partial F}{\partial v}-\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}\right)dv^2 \\ F\,du+G\,dv & F\,d^2u+G\,d^2v+\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial v}dv^2+\frac{\partial G}{\partial u}du\,dv+\left(\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}\right)du^2\end{vmatrix}.$$

305. *Telle est l'équation différentielle des lignes géodésiques;* pour la mettre sous la forme ordinaire, on peut prendre u pour variable indépendante et v pour fonction inconnue, ce qui donne $d^2u=0$. Il vient ainsi, en divisant la première colonne par du, la seconde par du^2, et posant $\frac{dv}{du}=v'$, $\frac{d^2v}{du^2}=v''$,

$$(4)\qquad \begin{vmatrix} E+Fv' & Fv''+\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u}+\frac{\partial E}{\partial v}v'+\left(\frac{\partial F}{\partial v}-\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}\right)v'^2 \\ F+Gv' & Gv''+\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial v}v'^2+\frac{\partial G}{\partial u}v'+\left(\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}\right)\end{vmatrix}=0.$$

Développons : le terme en $v'v''$ disparaît, et il reste une équation du type

$$(5)\qquad v''=A+Bv'+Cv'^2+Dv'^3,$$

A, B, C, D étant des fonctions de forme connue de u, v (comme les E, F, G). C'est une *équation différentielle du second ordre,* d'où il faudrait tirer la fonction inconnue v. On ne sait pas l'intégrer en général, mais elle a donné lieu à de nombreux et importants travaux, surtout dans des cas particuliers.

Observons seulement ici que son intégrale générale contient *deux* constantes arbitraires, c'est-à-dire qu'il y a, sur une surface, une *double* infinité de lignes géodésiques.

306. Si la surface est donnée sous la forme $z = f(x, y)$, on obtiendra l'équation différentielle des géodésiques en faisant, dans (4), $u = x$, $v = y$, $E = 1 + p^2$, $F = pq$, $G = 1 + q^2$ (Tome I, n° **414**), p et q désignant $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$. Il sera plus simple de partir directement de l'équation (3) :

$$\begin{vmatrix} A & dx & d^2x \\ B & dy & d^2y \\ C & dz & d^2z \end{vmatrix} = 0,$$

où l'on fera $A = p$; $B = q$, $C = -1$, valeurs des coefficients du plan tangent, et

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$
$$d^2z = r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2 + p\,d^2x + q\,d^2y,$$

suivant les notations habituelles. Si l'on prend x comme variable indépendante sur la géodésique, on a $d^2x = 0$, et il reste

$$0 = \begin{vmatrix} p & dx & 0 \\ q & dy & d^2y \\ -1 & p\,dx + q\,dy & r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2 + q\,d^2y \end{vmatrix}.$$

Multipliant la première ligne par $-p$, la seconde par $-q$, et ajoutant à la troisième, on obtient l'équation équivalente

$$0 = \begin{vmatrix} p & dx & 0 \\ q & dy & d^2y \\ -1 - p^2 - q^2 & 0 & r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2 \end{vmatrix}$$

ou

$$(6)\qquad \frac{d^2y}{dx^2}(1 + p^2 + q^2) - \left[r + 2s\frac{dy}{dx} + t\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]\left(p\frac{dy}{dx} - q\right) = 0,$$

équation différentielle du second ordre où l'inconnue est y, et qui est du même type que l'équation générale (5).

Si la surface donnée est un plan, $z = ax + by + c$, les quantités r, s, t sont nulles; $p = a$, $q = b$; et l'équation (6) se réduit

à $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, d'où $y = Cx + C'$. Les géodésiques d'un plan sont donc les droites de ce plan, résultat évident *a priori*.

307. Remarque. — L'équation différentielle (4) ne dépend que des coefficients E, F, G du carré de l'élément linéaire ds^2 sur la surface proposée : à toutes les surfaces pour lesquelles E, F, G sont les mêmes, c'est-à-dire *à l'ensemble des surfaces applicables les unes sur les autres* (Tome I, n° 455), correspond donc la même équation différentielle des géodésiques. Ce point était évident *a priori* : supposons en effet ces surfaces déterminées paramétriquement en fonction de deux paramètres u, v, de manière que E, F, G soient les mêmes pour toutes (*ibid.*); les courbes définies sur chacune d'elles par une même équation $\varphi(u, v) = 0$ s'appliqueront les unes sur les autres, et réciproquement : les géodésiques qui, évidemment, s'appliquent les unes sur les autres, en raison de leur propriété de plus courte distance, auront donc la même équation générale, et, par suite, la même équation différentielle.

308. Cas particulier. — Si le ds^2 sur une surface est donné sous la forme

$$ds^2 = du^2 + G\,dv^2, \tag{7}$$

c'est-à-dire si $E = 1$, $F = 0$, l'équation différentielle (4) des géodésiques devient

$$\begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}v'^2 \\ Gv' & Gv'' + \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial v}v'^2 + \frac{\partial G}{\partial u}v' \end{vmatrix} = 0,$$

et l'on aperçoit immédiatement la solution particulière $v' = 0$, c'est-à-dire $v = \text{const.}$ En d'autres termes, les courbes, en nombre simplement infini, $v = \text{const.}$, sont *des* géodésiques : ce ne sont pas d'ailleurs *toutes* les géodésiques, celles-ci étant en nombre doublement infini, puisque leur équation générale contient (n° 305) *deux* constantes arbitraires. Quant aux courbes $u = \text{const.}$, ce sont, puisque F est nul, (Tome I, n° 415), les trajectoires orthogonales de la famille de géodésiques $v = \text{const.}$

309. Propriétés des géodésiques. — La proposition réciproque de cette remarque conduit à des propriétés des géodésiques tout à fait analogues à celles des droites dans le plan.

Considérons, en effet, une famille réelle, simplement infinie, de géodésiques, et prenons ces lignes pour lignes coordonnées d'une série, $v = \text{const.}$; prenons leurs trajectoires orthogonales pour lignes coordonnées de l'autre série, $u = \text{const}$; je dis que ds^2 pourra être ramené à la forme (7). On a, d'abord, sur la surface,

$$ds^2 = E\,du^2 + G\,dv^2,$$

car F est nul à cause de l'orthogonalité des lignes $u = C$, $v = C'$.

Il faut maintenant que l'équation différentielle (4) des géodésiques soit vérifiée pour $v = \text{const.}$; nous avons ainsi, en y faisant $v' = v'' = 0$ et $F = 0$,

$$0 = \begin{vmatrix} E & \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u} \\ 0 & -\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} E \frac{\partial E}{\partial v}; \qquad \text{d'où} \qquad \frac{\partial E}{\partial v} = 0 \quad (^1),$$

quels que soient u et la constante v, c'est-à-dire quels que soient u et v; E est donc une fonction de u seul, que je désignerai par $f'^2(u)$.

Par suite, on peut écrire ds^2

$$ds^2 = f'^2(u)\,du^2 + G\,dv^2;$$

si maintenant on pose

$$f(u) = U,$$

et si l'on prend pour variable U à la place de u, il vient

$$ds^2 = dU^2 + G(U, v)\,dv^2,$$

expression de la forme (7).

C'est la réciproque qu'il s'agissait d'établir. On en déduit des conséquences intéressantes.

Les lignes $U = \text{const.}$ sont, puisque $U = f(u)$, les mêmes que

---

(1) Car, si E était nul, on aurait, sur les géodésiques $v = \text{const.}$ considérées, $ds^2 = E\,du^2 = 0$, c'est-à-dire que l'arc de ces géodésiques serait nul : c'est impossible puisqu'elles sont réelles.

les lignes $u =$ const., c'est-à-dire sont les trajectoires orthogonales des géodésiques $v =$ const. considérées; l'arc infiniment petit compris *sur une de ces géodésiques* entre les deux courbes U et $U + dU$ sera donné par l'équation

$$ds = \sqrt{dU^2 + G\,dv^2},$$

où l'on fera $dv = 0$, puisqu'on se déplace sur une courbe $v =$ const.; c'est-à-dire

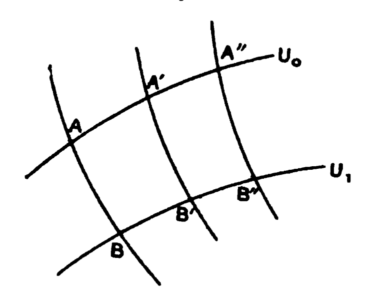
$$ds = dU.$$

On en conclut, pour l'arc fini, s, compris sur la géodésique $v =$ const., entre les deux lignes fixes $U = U_1$ et $U = U_0$,

$$s = U_1 - U_0.$$

Cet arc, $U_1 - U_0$, est donc *constant*, quelle que soit la géodésique $v =$ const. considérée; c'est-à-dire (*fig.* 82) que les arcs AB, A'B', A''B'', ..., interceptés, sur les géodésiques d'une famille

Fig. 82.



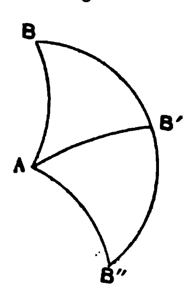
simplement infinie quelconque, par deux mêmes trajectoires orthogonales de ces courbes, sont égaux entre eux. C'est la généralisation d'une propriété connue des tangentes à une courbe plane et de leurs trajectoires orthogonales (Tome I, n° 82).

En particulier, si les géodésiques considérées passent par un même point, une de leurs trajectoires orthogonales sera un cercle de rayon infiniment petit ayant ce point pour centre, d'où cette conclusion :

Sur toutes les géodésiques qui passent par un même point A, *les arcs compris entre le point* A *et une trajectoire orthogonale*

quelconque (B, B′, B″) *de ces géodésiques ont la même longueur* [1]; ou encore : *Si, à partir du point* A, *on porte, sur toutes les géodésiques passant par ce point, une même lon-*

Fig. 83.



gueur, le lieu des extrémités, B, B′, B″, ..., *des arcs obtenus est une trajectoire orthogonale des géodésiques considérées.*

On reconnaît là une propriété des droites issues d'un point dans un plan; on en déduit, pour les géodésiques, de nombreuses propriétés dont nous citerons la suivante :

Si les géodésiques qui joignent deux points fixes, A *et* B, *à un point* M, *variable sur une courbe, font des angles égaux avec la tangente à la courbe en* M, *la somme (ou la différence) des arcs géodésiques* MA *et* MB *est constante.*

La démonstration est tout à fait semblable à celle qu'on a donnée, au n° **82** du Tome I, pour le théorème de Chasles sur les arcs d'ellipse; nous laissons au lecteur le soin de la rétablir.

Exemples de lignes géodésiques.

310. Cylindres. — Prenons l'axe des y parallèle aux génératrices; le cylindre a pour équation

$$z = f(x),$$

[1] De même : *Si, entre deux points* A *et* B, *on peut mener une infinité de géodésiques, les arcs compris sur chacune d'elles entre les deux points ont même longueur*. Exemple : les méridiens d'une sphère.

d'où

$$p = f'(x); \qquad q = 0; \qquad r = f''(x); \qquad s = t = 0.$$

L'équation différentielle (6) des géodésiques est donc ici :

$$\frac{d^2y}{dx^2}[1 + f'^2(x)] - f''(x)f'(x)\frac{dy}{dx} = 0,$$

équation où y ne figure pas, et qu'on intègre immédiatement en l'écrivant

$$\frac{y''}{y'} = \frac{f'(x)f''(x)}{1 + f'^2(x)};$$

d'où

$$\log y' = \frac{1}{2}\log(1 + f'^2) + \log C;$$

(8) $$y' = C\sqrt{1 + f'^2};$$

$$y = C\int\sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx + C'.$$

Telle est l'équation des géodésiques, en projection sur le plan des xy.

L'équation (8) conduit à une propriété géométrique de ces lignes. Les paramètres directeurs de la tangente à une géodésique sont proportionnels à dx, dy, dz, c'est-à-dire, en vertu de (8) et de l'équation $z = f(x)$ de la surface, à 1, $C\sqrt{1 + f'^2}$, f'; le cosinus de l'angle de cette tangente avec l'axe des y est

$$\frac{C\sqrt{1 + f'^2}}{\sqrt{1 + C^2(1 + f'^2) + f'^2}} = \frac{C}{\sqrt{1 + C^2}};$$

il est donc constant le long d'une même géodésique. *Chaque géodésique coupe ainsi toutes les génératrices du cylindre sous un angle constant* : les géodésiques sont donc les *hélices* tracées sur le cylindre (Tome I, n° 407).

Ces propriétés sont évidentes *a priori* : il suffit d'observer que, dans le développement du cylindre sur un plan, les géodésiques deviennent des droites, et les génératrices des droites parallèles entre elles.

311. Surfaces de révolution. — Oz étant l'axe de révolution, on définit la surface (Tome I, n° 416) par les relations paramétriques

$$x = r\cos\omega; \qquad y = r\sin\omega; \qquad z = \varphi(r);$$

la méridienne, dans le plan zOx, est $z = \varphi(x)$, et l'on a (*ibid.*)

$$E = 1 + \varphi'^2(r); \qquad F = 0; \qquad G = r^2.$$

L'équation différentielle (4), si l'on écrit r et ω au lieu de u et v, est ici

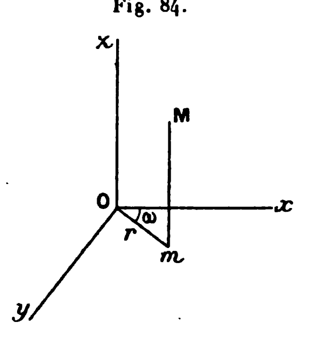
$$\begin{vmatrix} 1+\varphi'^2(r) & \varphi'(r)\varphi''(r) - r\omega'^2 \\ r^2\omega' & r^2\omega'' + 2r\omega' \end{vmatrix} = 0,$$

ou, après développement,

$$\omega'' r(1+\varphi'^2) + 2\omega'(1+\varphi'^2) - r\omega'\varphi'\varphi'' + r^2\omega'^3 = 0.$$

L'inconnue ω manque, et l'on a ainsi une équation de Bernoulli

Fig. 84.



par rapport à l'inconnue ω'. On posera donc pour intégrer (n° 257)

$$\frac{1}{\omega'^2} = \theta :$$

d'où

$$-\frac{1}{2} r(1+\varphi'^2)\frac{d\theta}{dr} + \theta(2 + 2\varphi'^2 - r\varphi'\varphi'') + r^2 = 0,$$

équation linéaire en θ qui s'intègre sans difficulté ([1]), et donne

$$\theta \text{ c'est-à-dire } \frac{1}{\omega'^2} = \frac{r^2(Cr^2 - 1)}{1 + \varphi'^2(r)},$$

C désignant la constante arbitraire.

([1]) On pose pour cela, selon la méthode générale, $\theta = UV$, et l'on annule le coefficient de U, ce qui donne

$$-\frac{1}{2}V' r(1+\varphi'^2) + V(2 + 2\varphi'^2 - r\varphi'\varphi'') = 0.$$

Écrivons maintenant $\frac{d\omega}{dr}$ à la place de ω', et séparons les variables,

$$(9) \qquad d\omega = \frac{dr}{r}\sqrt{\frac{1+\varphi'^2(r)}{Cr^2-1}};$$

nous obtenons finalement, par une quadrature, l'équation des géodésiques sous la forme

$$(10) \qquad \omega = \int \frac{dr}{r}\sqrt{\frac{1+\varphi'^2(r)}{Cr^2-1}} + C'.$$

D'après la signification géométrique de r et ω, cette relation est l'équation, en coordonnées polaires, des lignes géodésiques projetées sur le plan des xy.

Ainsi : *la détermination des géodésiques des surfaces de révolution se ramène à une quadrature.*

L'équation (10) montre que, pour une géodésique réelle, la constante C est nécessairement positive.

312. Interprétation géométrique. — La relation (9), qui est ce qu'on appelle une *intégrale première* de l'équation différentielle des lignes géodésiques (voir le Chapitre suivant, n° 329), peut s'écrire

$$\begin{aligned} Cr^4 d\omega^2 &= dr^2[1+\varphi'^2(r)] + r^2 d\omega^2 \\ &= ds^2, \end{aligned}$$

---

et

$$\frac{1}{2}VU'r(1+\varphi'^2) = r^2$$

Par suite

$$\frac{V'}{V} = \frac{4(1+\varphi'^2) - 2r\varphi'\varphi''}{r(1+\varphi'^2)} = \frac{4}{r} - \frac{2\varphi'\varphi''}{1+\varphi'^2},$$

d'où

$$V = \frac{r^4}{1+\varphi'^2},$$

et

$$\frac{1}{2}\,\frac{r^4}{1+\varphi'^2}\,r(1+\varphi'^2)\,U' = r^2, \qquad \text{ou} \qquad U' = \frac{2}{r^3},$$

d'où

$$U = -\frac{1}{r^2} + C.$$

Finalement

$$\theta = UV = \frac{Cr^2-1}{1+\varphi'^2}\,r^2$$

ds^2 désignant le carré de l'élément d'arc sur la surface de révolution (Tome I, n° 416).

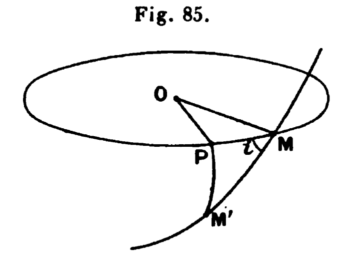
On a ainsi l'équation

$$(11) \qquad ds = \sqrt{C}\, r^2\, d\omega,$$

vérifiée le long d'une géodésique.

Or, soient $M(r, \omega)$ un point d'une géodésique, M' le point infiniment voisin $(r + dr, \omega + d\omega)$ sur cette ligne. Menons (*fig.* 85)

Fig. 85.



le méridien M'P qui passe par M', jusqu'à sa rencontre en P avec le parallèle du point M; on a

$$OM = r, \qquad \widehat{POM} = d\omega, \qquad MP = r\, d\omega.$$

L'équation (11) s'écrit alors

$$MM' = \sqrt{C}\, r\, \overline{MP}$$

ou

$$\frac{1}{\sqrt{C}} = r\frac{MP}{MM'} = r \cos i,$$

i désignant l'angle PMM', sous lequel la géodésique coupe le parallèle. On a donc, tout le long d'une même géodésique,

$$r \cos i = \text{const.},$$

ce qui s'énonce ainsi :

Soit i l'angle sous lequel une géodésique fixe coupe le parallèle variable de rayon r; le produit $r \cos i$ est constant le long de la géodésique. (Clairaut.)

Géodésiques de l'ellipsoïde.

313. Coordonnées elliptiques. — Nous avons vu (Tome I, n° 417) qu'on peut représenter paramétriquement l'ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ par les équations

$$(\mathrm{E})\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{x}{a}=\sqrt{\frac{(a^2-u)(a^2-v)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}},\qquad \frac{y}{b}=\sqrt{\frac{(b^2-u)(b^2-v)}{(b^2-a^2)(b^2-c^2)}},\\ &\frac{z}{c}=\sqrt{\frac{(c^2-u)(c^2-v)}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}};\end{aligned}\right.$$

les lignes $u=$ const. et $v=$ const. sont les deux systèmes de lignes de courbure. Les seconds membres ne changent pas quand on permute u et v; on a donc le droit de supposer $v \leqq u$, et l'on en conclut aisément, en supposant $a>b>c$, que les points réels de l'ellipsoïde sont obtenus en donnant à v et u des valeurs respectivement comprises entre c^2 et b^2, et entre b^2 et a^2. On ne peut donc avoir $u=v$, pour un point réel, que si $u=v=b^2$; les points correspondants de l'ellipsoïde sont alors les *quatre* ombilics réels [1].

Le ds^2 sur l'ellipsoïde (E) a pour expression

$$ds^2=(u-v)\left[\frac{u\,du^2}{4(a^2-u)(b^2-u)(c^2-u)}+\frac{v\,dv^2}{4(a^2-v)(b^2-v)(v-c^2)}\right].$$

314. Étude d'un cas plus général. — Ce ds^2 est compris, comme cas particulier, dans la formule

$$(1)\qquad ds^2=(u-v)(\mathrm{U}^2\,du^2+\mathrm{V}^2\,dv^2),$$

où u et v sont toujours les paramètres qui déterminent un point de la surface, U une fonction de u *seul*, V une fonction de v *seul*. On peut écrire identiquement, en désignant par λ une constante arbitraire,

$$ds^2=\left[(\sqrt{u-\lambda})^2+(\sqrt{\lambda-v})^2\right]\left[(\mathrm{U}\,du)^2+(\mathrm{V}\,dv)^2\right],$$

---

[1] Car les radicaux, dans (E), comportent le double signe.

d'où, en vertu de l'identité classique de Lagrange,

$$ds^2 = [\sqrt{u-\lambda}\,U\,du + \sqrt{\lambda - v}\,V\,dv]^2 + [\sqrt{u-\lambda}\,V\,dv - \sqrt{\lambda-v}\,U\,du]^2.$$

Posons maintenant

$$(2)\qquad \begin{cases} \sqrt{u-\lambda}\,U\,du + \sqrt{\lambda-v}\,V\,dv = du', \\ \dfrac{V\,dv}{\sqrt{\lambda-v}} - \dfrac{U\,du}{\sqrt{u-\lambda}} = dv', \end{cases}$$

ce qui est possible, les deux premiers membres étant évidemment des différentielles exactes, d'après les hypothèses faites sur U et V; il vient ainsi

$$(3)\qquad ds^2 = du'^2 + (u-\lambda)(\lambda - v)\,dv'^2 = du'^2 + G(u', v')\,dv'^2,$$

formule qui montre (n° 308) que les courbes $v' =$ const. sont des géodésiques. D'après (2), l'équation de ces courbes, en u et v, est

$$(4)\qquad \int \frac{V\,dv}{\sqrt{\lambda - v}} - \int \frac{U\,du}{\sqrt{u-\lambda}} = \text{const.},$$

et, comme λ est arbitraire, cette relation, qui contient *deux* constantes arbitraires, est l'équation *générale* des géodésiques sur la surface considérée.

Remarques. — Appelons *géodésiques de la famille* λ_0, ou *géodésiques* λ_0, celles qui correspondent à la valeur λ_0 de la constante λ. Elles sont en nombre simplement infini, et l'on a, le long de chacune d'elles, en différentiant (4),

$$(5)\qquad \frac{V\,dv}{\sqrt{\lambda_0 - v}} - \frac{U\,du}{\sqrt{u-\lambda_0}} = 0.$$

Soit i l'angle que fait l'une de ces courbes, MP (*fig.* 86), au point M(u, v), avec la ligne coordonnée $v =$ const. qui passe par ce point; il est aisé de le calculer. Figurons, en effet, les quatre lignes coordonnées qui passent respectivement par les points infiniment voisins, M et P, de la géodésique proposée, c'est-à-dire qui répondent aux valeurs u, $u + du$; v, $v + dv$ des paramètres u et v : elles déterminent un *rectangle* infiniment petit, MNPQ, car, le terme en $du\,dv$ manquant dans l'expression (1) de ds^2, les lignes coordonnées $u =$ const. et $v =$ const. sont rectangulaires.

On a

$$\overline{MP}^2 = ds^2 = (u - v)(U^2\,du^2 + V^2\,dv^2),$$

et, en faisant dans cette relation $dv = 0$,

$$\overline{MN}^2 = (u - v)\,U^2\,du^2;$$

d'où

$$\cos^2 i = \frac{\overline{MN}^2}{\overline{MP}^2} = \frac{U^2\,du^2}{U^2\,du^2 + V^2\,dv^2} = \frac{U^2}{U^2 + V^2\left(\dfrac{dv}{du}\right)^2}.$$

Remplaçons maintenant $\left(\dfrac{dv}{du}\right)^2$ par sa valeur tirée de (5), nous trouvons

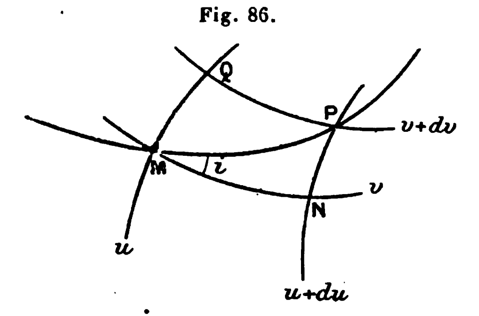
$$(6) \qquad \cos^2 i = \frac{u - \lambda_0}{u - v},$$

ce qui s'écrit

$$(7) \qquad u \sin^2 i + v \cos^2 i = \lambda_0.$$

C'est là une relation vérifiée en tout point d'une géodésique de la famille λ_0; i est l'angle sous lequel cette géodésique coupe, au point (u, v), la ligne coordonnée $v = \text{const.}$ qui passe par ce point. La relation (7) équivaut évidemment à l'équation différen-

Fig. 86.



tielle (5) qui a servi à la former, et qui peut, inversement, en être déduite : *elle caractérise donc les géodésiques* λ_0.

Je dis que :

Les géodésiques λ_0 *touchent la ligne coordonnée* $v = \lambda_0$, *et réciproquement.*

Car soit (u, λ_0) un point de cette ligne; pour les géodésiques λ_0

qui y passent, on a, en faisant $v = \lambda_0$ dans (7),

$$u \sin^2 i = \lambda_0 \sin^2 i, \qquad \text{ou} \qquad (u - \lambda_0)\sin^2 i = 0,$$

ce qui donne $i = 0$: les géodésiques λ_0 touchent donc la ligne $v = \lambda_0$ aux points où elles la rencontrent. Réciproquement, si une géodésique de la famille λ touche en (u, λ_0) la courbe $v = \lambda_0$, l'équation (7),

$$u \sin^2 i + v \cos^2 i = \lambda,$$

doit être vérifiée pour $i = 0$, $v = \lambda_0$, ce qui donne

$$\lambda = \lambda_0,$$

et, par suite, la géodésique considérée appartient à la famille λ_0. On démontrerait de même que les géodésiques λ_0 touchent aussi la ligne $u = \lambda_0$, et réciproquement.

315. Application à l'ellipsoïde. — Le ds^2 de l'ellipsoïde est (n° 313) du type (1); on a dans ce cas

$$(8) \qquad \begin{cases} U = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{u}{(a^2 - u)(b^2 - u)(c^2 - u)}}, \\[2ex] V = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{v}{(a^2 - v)(b^2 - v)(v - c^2)}}, \end{cases}$$

de sorte que l'équation générale (4) des géodésiques s'écrit

$$(9) \qquad \begin{cases} \displaystyle\int \frac{v\,dv}{\sqrt{v(a^2 - v)(b^2 - v)(v - c^2)(\lambda - v)}} \\[2ex] \displaystyle\pm\int \frac{u\,du}{\sqrt{u(a^2 - u)(b^2 - u)(c^2 - u)(u - \lambda)}} = \text{const.} \end{cases}$$

Les intégrales auxquelles on est ainsi conduit sont *hyperelliptiques*.

On déduit de ce qui précède d'intéressantes propriétés géométriques. Présentons d'abord quelques remarques.

1° Par un point $M(u, v)$ de l'ellipsoïde il passe en général deux géodésiques d'une famille donnée λ_0.

En effet, l'équation (5), qui donne la direction $\dfrac{dv}{du}$ de la tangente en (u, v) aux géodésiques λ_0 passant par ce point, s'écrit, après

substitution à U et V de leurs valeurs,

$$\left(\frac{dv}{du}\right)^2 = \frac{u}{v}\,\frac{(a^2-v)(b^2-v)(v-c^2)(\lambda_0-v)}{(a^2-u)(b^2-u)(c^2-u)(u-\lambda_0)},$$

d'où *deux* directions de tangente et, par suite, deux géodésiques [1].

2° Les deux géodésiques λ_0 qui passent par un point sont également inclinées sur les deux lignes de courbure en ce point.

Car les lignes de courbure sont (n° 313) les lignes coordonnées

$$u = \text{const.}, \qquad v = \text{const.},$$

et l'équation (6) donne pour $\cos i$ deux valeurs égales et de signes contraires.

3° Les géodésiques λ_0 touchent la ligne de courbure $v = \lambda_0$, et réciproquement.

C'est une conséquence d'une remarque générale précédente [2].

Géodésiques passant par un ombilic. — Les quatre ombilics réels ont (n° 313) pour coordonnées $u = v = b^2$; or l'équation (7),

$$u \sin^2 i + v \cos^2 i = \lambda_0,$$

devient, si le point u, v est un ombilic,

$$b^2 = \lambda_0,$$

ce qui prouve que toute géodésique passant par un ombilic est de la famille b^2.

Soit alors M un point quelconque de l'ellipsoïde; joignons-le aux quatre ombilics réels A, B, C, D par les géodésiques (*fig.* 87) MA, MB, MC, MD : ces quatre lignes sont de la famille b^2. Comme il ne passe par un point M que deux géodésiques d'une famille λ,

---

(1) Le lecteur admettra sans peine que, sur l'ellipsoïde, il n'y a en général qu'une ligne géodésique passant par deux points donnés, parce qu'on ne peut tendre, *sur la surface,* entre les deux points, qu'un seul fil. De même il n'y a qu'une géodésique partant d'un point donné dans une direction donnée.

(2) Elles touchent également la ligne de courbure $u = \lambda_0$ (n° 314). Mais, pour obtenir des points réels sur l'ellipsoïde, nous savons (n° 313) qu'il faut faire varier v de c^2 à b^2, et u de b^2 à a^2. Par suite, selon que λ_0 sera compris entre c^2 et b^2 ou entre b^2 et a^2, les géodésiques λ_0 toucheront la ligne de courbure *réelle* $v = \lambda_0$ ou la ligne de courbure *réelle* $u = \lambda_0$.

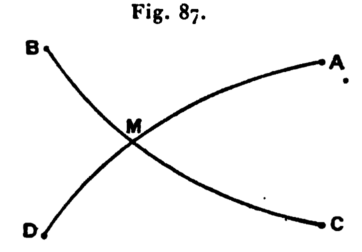
les géodésiques MC et MD sont nécessairement le prolongement des géodésiques BM et AM. En d'autres termes :

Toute géodésique qui part d'un ombilic réel va à l'ombilic opposé.

Corollaire I. — D'après cela, il y a une infinité simple de géodésiques allant d'un ombilic à l'ombilic opposé ; *toutes ces géodésiques ont la même longueur* (n° 309, Note).

Corollaire II. — Les géodésiques MA et MB, étant de la même

Fig. 87.



famille, b^2, sont également inclinées en M sur les lignes de courbure ; donc (n° 309) :

Si un point M *décrit une ligne de courbure, la somme ou la différence des arcs géodésiques qui le joignent à deux ombilics non opposés est constante.*

Sous une autre forme :

Si un fil de longueur constante a ses extrémités fixées en deux ombilics non opposés de l'ellipsoïde, et si on le maintient tendu sur l'ellipsoïde par une pointe de crayon, cette pointe trace une ligne de courbure de la surface.

CHAPITRE III.

SYSTÈMES D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

I. — GÉNÉRALITÉS; THÉORÈME DE CAUCHY.

316. Définition. — On nomme *système* de n équations différentielles à n inconnues, fonctions d'une seule variable x, un système de n équations entre x, les n fonctions inconnues et leurs dérivées.

L'intégration d'un tel système peut se ramener à celle d'une seule équation. Soit, par exemple, ($n = 2$), le système

$$(1) \qquad f_1\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^{p_1}y}{dx^{p_1}}, z, \frac{dz}{dx}, \ldots, \frac{d^{q_1}z}{dx^{q_1}}\right) = 0,$$

$$(2) \qquad f_2\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^{p_2}y}{dx^{p_2}}, z, \frac{dz}{dx}, \ldots, \frac{d^{q_2}z}{dx^{q_2}}\right) = 0.$$

Pour éliminer y, dérivons p_2 fois l'équation (1) par rapport à x, et p_1 fois l'équation (2); nous obtenons ainsi, en tout, $p_1 + p_2 + 2$ équations, contenant les inconnues y, z et leurs dérivées, jusqu'à l'ordre $p_1 + p_2$, pour y, et M pour z, M étant le plus grand des nombres $p_2 + q_1$ et $p_1 + q_2$. Entre ces $p_1 + p_2 + 2$ équations, éliminons les $p_1 + p_2 + 1$ inconnues $y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^{p_1+p_2}y}{dx^{p_1+p_2}}$; le résultat est une équation différentielle en z, d'ordre M. Celle-ci une fois intégrée, z et ses dérivées sont connues, et les équations entre lesquelles on vient de faire l'élimination (moins une), résolues par rapport à y et à ses dérivées, feront connaître ces quantités : on obtiendra donc y sans nouvelle intégration.

Ces résultats s'étendent évidemment à un système de n équations à n inconnues.

317. Forme canonique. — On peut ramener un système à un autre, contenant plus d'inconnues, mais ne renfermant que des

dérivées du premier ordre. Soit, par exemple, le système

$$(3)\quad \begin{cases} f\left(x, y, \dfrac{dy}{dx}, \ldots, \dfrac{d^p y}{dx^p}, z, \dfrac{dz}{dx}, \ldots, \dfrac{d^q z}{dx^q}\right) = 0, \\ f_1\left(x, y, \ldots, \ldots, \dfrac{d^r y}{dx^r}, z, \ldots, \ldots, \dfrac{d^s z}{dx^s}\right) = 0. \end{cases}$$

Supposons, pour fixer les idées, $p > r$ et $q < s$; prenons pour inconnues auxiliaires les suivantes :

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y', & \dfrac{dy'}{dx} = y'', & \ldots, & \dfrac{dy^{(p-2)}}{dx} = y^{(p-1)}, \\ \dfrac{dz}{dx} = z', & \dfrac{dz'}{dx} = z'', & \ldots. & \dfrac{dz^{(s-2)}}{dx} = z^{(s-1)}; \end{cases}$$

nous aurons

$$\frac{d^s z}{dx^s} = \frac{dz^{(s-1)}}{dx}$$

et

$$\frac{d^p y}{dx^p} = \frac{dy^{(p-1)}}{dx},$$

de sorte que les équations (3) et (4) formeront un système de $p + s$ équations, entre les $p + s$ inconnues $y, y', \ldots, y^{(p-1)}$, $z, z', \ldots, z^{(s-1)}$, où n'interviennent, avec ces inconnues, que leurs dérivées premières.

Soit donc, d'une manière générale,

$$(5)\quad f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad \ldots, \quad f_n = 0,$$

un système de n équations entre la variable x, n fonctions inconnues $y, z, u, \ldots$, et leurs dérivées premières. Résolvons-les par rapport aux n dérivées $\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}, \ldots$, nous aurons le système, dit *canonique*,

$$\frac{dy}{dx} = \varphi_1(x, y, z, u, \ldots),$$
$$\frac{dz}{dx} = \varphi_2(x, y, z, u, \ldots),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Si la résolution de (5) par rapport aux dérivées est impossible, c'est-à-dire si, des équations (5), on ne peut tirer $\frac{dz}{dx}$, par exemple, en fonction de $x, y, z, u, \ldots$, c'est qu'en éliminant entre ces équations les $(n-1)$ autres dérivées, on arrive à une équation ne

contenant pas $\frac{dz}{dx}$, et qui, par suite, est de la forme

$$\Phi(x, y, z, u, \ldots) = 0. \tag{6}$$

Elle pourra remplacer une des équations (5), par exemple $f_n = 0$. On tirera de (6) une des inconnues en fonction des autres et de x,

$$y = \psi(x, z, u, \ldots),$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = \psi'_x + \psi'_z \frac{dz}{dx} + \psi'_u \frac{du}{dx} + \ldots.$$

Substituant ces valeurs dans $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}$, on aura un nouveau système à $n - 1$ inconnues, $z, u, \ldots$ ne renfermant que les dérivées premières. Si l'on peut en tirer ces dérivées, on l'aura réduit à la forme canonique; sinon on le ramènera à un système à $n - 2$ inconnues, et ainsi de suite. D'ailleurs une équation du premier ordre à une inconnue forme un système canonique.

On peut donc toujours ramener un système d'équations différentielles à la forme canonique; on appelle *ordre d'un tel système* le nombre des équations qu'il renferme, c'est-à-dire celui des fonctions inconnues.

Remarque. — La réduction à la forme canonique n'a qu'un avantage purement théorique; elle simplifie et précise les raisonnements à faire sur les systèmes d'équations différentielles, mais elle est généralement inutile pour l'intégration d'un système.

Théorème de Cauchy.

318. Cauchy a établi un théorème fondamental sur l'existence des solutions d'un système canonique; afin de pouvoir exposer ici la démonstration de l'illustre analyste, nous la ferons précéder de quelques propositions sur les fonctions analytiques de plusieurs variables.

319. Définition. — Soit $f(x, y)$ une fonction continue de deux variables imaginaires, x et y, analytique séparément par rapport à x et par rapport à y. Elle sera dite fonction holomorphe de x et y, dans les régions C_1 du plan de la variable x, et C_2 du plan

de la variable y, si elle est fonction holomorphe *séparément* de x et de y, dans les régions C_1 et C_2, c'est-à-dire si $f(x, y_0)$ et $f(x_0, y)$ sont respectivement fonctions holomorphes de x dans C_1, et de y dans C_2, y_0 et x_0 désignant des points, quelconques d'ailleurs, de C_2 et C_1.

320. Expression des dérivées. — Supposons que C_1 et C_2 soient deux cercles de centres respectifs a et b, de rayons R_1 et R_2, et que $f(x, y)$ soit holomorphe en x et y dans C_1 et C_2, et sur les contours de ces cercles. Nous savons que, si $\psi(z)$ est fonction holomorphe de z à l'intérieur d'un contour γ, et sur γ, l'expression de sa dérivée d'ordre n est (n° 114)

$$\psi^n(a) = \frac{1.2\ldots n}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\psi(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz,$$

a étant intérieur à γ. Appliquons cette formule à la fonction $f(x, b)$ considérée comme fonction de x, le contour γ étant celui, γ_1, du cercle C_1, de centre a; il vient

$$\frac{\partial^n}{\partial a^n} f(a, b) = \frac{1.2\ldots n}{2\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{f(z, b)}{(z-a)^{n+1}}\,dz.$$

Or, sur la circonférence γ_1, on a

$$z - a = R_1 e^{i\varphi}, \qquad dz = R_1 e^{i\varphi} i\, d\varphi,$$

et, par suite,

$$(1) \qquad \frac{\partial^n}{\partial a^n} f(a, b) = \frac{1.2\ldots n}{2\pi R_1^n}\int_0^{2\pi} f(a + R_1 e^{i\varphi}, b)\, e^{-ni\varphi}\, d\varphi.$$

De même, en partant de la fonction $f(a, y)$, on aurait

$$(2) \qquad \frac{\partial^p}{\partial b^p} f(a, b) = \frac{1.2\ldots p}{2\pi R_2^p}\int_0^{2\pi} f(a, b + R_2 e^{i\theta})\, e^{-pi\theta}\, d\theta.$$

On reconnaît sans difficulté, comme au n° 114, que le second membre de la formule (1) est une fonction de b dont les dérivées successives s'obtiennent en appliquant la règle ordinaire de dérivation sous le signe $\int$; on a donc, en dérivant p fois par rapport à b les deux membres de (1),

$$\frac{\partial^{n+p}}{\partial a^n \partial b^p} f(a, b) = \frac{1.2\ldots n}{2\pi R_1^n}\int_0^{2\pi} \frac{\partial^p}{\partial b^p} f(a + R_1 e^{i\varphi}, b)\, e^{-ni\varphi}\, d\varphi,$$

et, en remplaçant sous le signe $\int$ la dérivée $\frac{\partial^p f}{\partial b^p}$ par sa valeur déduite de (2),

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^{n+p}}{\partial a^n \partial b^p} f(a,b) \\ &\quad = \frac{1.2\ldots n.1.2\ldots p}{4\pi^2 R_1^n R_2^p} \int_0^{2\pi} d\varphi \left[\int_0^{2\pi} f(a+R_1 e^{i\varphi}, b+R_2 e^{i\theta}) e^{-ni\varphi - pi\theta} d\theta \right], \end{aligned}\right.$$

φ étant regardé comme constant dans l'intégrale en θ. Il est clair que le second membre a une valeur finie et déterminée, et la formule (3), jointe aux formules (1) et (2), établit l'existence des dérivées partielles de tous ordres de la fonction $f(x, y)$ au point a, b; elle donne en même temps l'expression de ces dérivées.

On en déduit une limite supérieure du module de celles-ci.

Soit M le maximum de mod $f(x, y)$ lorsque x et y restent sur les contours des cercles C_1 et C_2; on a évidemment, par (3),

$$(4)\qquad \operatorname{mod}\left[\frac{\partial^{n+p}}{\partial a^n d b^p} f(a,b)\right] < \frac{1.2\ldots n.1.2\ldots p}{R_1^n R_2^p} M,$$

et, *a fortiori*, si R est le plus petit des rayons R_1 et R_2,

$$(5)\qquad \operatorname{mod}\left[\frac{\partial^{n+p}}{\partial a^n \partial b^p} f(a,b)\right] < \frac{1.2\ldots n.1.2\ldots p}{R^{n+p}} M.$$

On vérifie de même que mod $f(a, b)$ est inférieur à M.

321. Remarque. — Soit la fonction

$$(6)\qquad F(x,y) = \frac{M}{\left(1-\frac{x-a}{R}\right)\left(1-\frac{y-b}{R}\right)};$$

je dis que pour $x = a$, $y = b$, ses dérivées partielles en x et y sont supérieures au module des dérivées homologues de $f(x, y)$. On a en effet

$$(7)\qquad \left[\frac{\partial^{n+p}}{\partial x^n \partial y^p} F(x,y)\right]_{\substack{x=a\\y=b}} = \frac{1.2\ldots n.1.2\ldots p}{R^{n+p}} M,$$

ce qui, en vertu de (5), établit la proposition. De même, $F(a, b)$ est supérieur à mod $f(a, b)$.

322. Théorème de Cauchy. — Considérons maintenant un sys-

tème canonique, de deux équations par exemple,

$$(8)\qquad \frac{dy}{dx} = \varphi_1(x, y, z); \qquad \frac{dz}{dx} = \varphi_2(x, y, z);$$

et soit a, b, c un point ordinaire pour les fonctions de trois variables φ_1 et φ_2, c'est-à-dire un point tel que φ_1 et φ_2 soient fonctions holomorphes de x, y, z tant que ces variables restent respectivement dans des cercles C_1, C_2, C_3 de rayons R_1, R_2, R_3, décrits de a, b, c comme centres, ou sur les circonférences de ces cercles. Désignons par R le plus petit des trois rayons; par M le maximum des modules de φ_1 et φ_2 sur les circonférences.

Nous allons montrer qu'il existe des fonctions, y et z, de la variable x, jouissant de la triple propriété:

1° De satisfaire aux équations différentielles (8);

2° De se réduire respectivement à b et c pour $x = a$;

3° D'être fonctions holomorphes de x quand cette variable reste à l'intérieur d'un cercle de centre a, dont le rayon maximum ne peut d'ailleurs être fixé avec précision.

Cherchons en effet les développements, en séries de Taylor ordonnées suivant les puissances croissantes de $x - a$, des solutions y et z précédentes, si elles existent; on aura

$$(9)\qquad \begin{cases} y = b + (x-a)y'_a + \frac{1}{2}(x-a)^2 y''_a + \ldots, \\ z = c + (x-a)z'_a + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

et les équations (8) donneront les valeurs de y'_a, z'_a, y''_a, z''_a, ..., par des dérivations successives:

$$(10)\qquad \begin{cases} y'_a = \varphi_1(a, b, c); & z'_a = \varphi_2(a, b, c); \\ y''_a = \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial a} + \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial b} y'_a + \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial c} z'_a; & z''_a = \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial a} + \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial b} y'_a + \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial c} z'_a; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_a^{(n)} = \dfrac{\partial^n\varphi_1}{\partial a^n} + \ldots + \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial b} y_a^{(n-1)} + \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial c} z_a^{(n-1)}; & z_a^{(n)} = \dfrac{\partial^n\varphi_2}{\partial a^n} + \ldots + \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial b} y_a^{(n-1)} + \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial c} z_a^{(n-1)}. \end{cases}$$

On aura donc, par voie de récurrence, $y_a^{(n)}$ et $z_a^{(n)}$ sous la forme

$$(11)\qquad y_a^{(n)} = \Phi_n, \qquad z_a^{(n)} = \Psi_n,$$

Φ_n et Ψ_n étant des polynomes entiers par rapport à $\varphi_1(a, b, c)$,

$\varphi_2(a, b, c)$ et leurs dérivées partielles jusqu'à l'ordre n inclus: *dans ces polynomes, tous les coefficients numériques sont positifs,* car les seconds membres, dans (10), ne présentent que des signes $+$.

Je dis maintenant, *et c'est là le point fondamental,* que les séries (9) sont convergentes, au moins pour des valeurs assez petites de $\operatorname{mod}(x-a)$.

Dans ce but, considérons avec Cauchy, en gardant les notations indiquées plus haut, le système canonique auxiliaire

$$(12)\quad \begin{cases} \dfrac{dY}{dx} = M \dfrac{1}{\left(1-\dfrac{x-a}{R}\right)} \dfrac{1}{\left(1-\dfrac{Y-b}{R}\right)} \dfrac{1}{\left(1-\dfrac{Z-c}{R}\right)}, \\[2ex] \dfrac{dZ}{dx} = M \dfrac{1}{\left(1-\dfrac{x-a}{R}\right)} \dfrac{1}{\left(1-\dfrac{Y-b}{R}\right)} \dfrac{1}{\left(1-\dfrac{Z-c}{R}\right)}, \end{cases}$$

où les inconnues Y et Z sont assujetties à être égales à b et c pour $x = a$, et qui s'intègre immédiatement. Car on a

$$\frac{dY}{dx} = \frac{dZ}{dx},$$

d'où

$$(13)\qquad Y - b = Z - c;$$

et, en portant cette valeur de $Z - c$ dans la première équation (12), et séparant les variables Y et x,

$$\left(1-\frac{Y-b}{R}\right)^2 dY = M \frac{dx}{1-\dfrac{x-a}{R}}.$$

Intégrons :

$$-\frac{R}{3}\left(1-\frac{Y-b}{R}\right)^3 = -RM\log\left(1-\frac{x-a}{R}\right) + \text{const.}$$

Pour $x = a$, Y doit être égal à b; la constante est donc $-\frac{R}{3}$, et il vient enfin

$$(14)\qquad Y - b = Z - c = R\left[1-\sqrt[3]{1+3M\log\left(1-\frac{x-a}{R}\right)}\right].$$

Les points critiques des fonctions $Y - b$ et $Z - c$ sont (n° 100, *Remarque*) ceux qui annulent la quantité sous le signe log et la

quantité sous le signe $\sqrt[3]{}$; ils sont donc donnés par

$$x = a + R; \qquad x = a + R\left(1 - e^{-\frac{1}{3M}}\right).$$

Le second point est plus voisin du point a que le premier; donc $Y - b$ et $Z - c$ sont fonctions holomorphes de x à l'intérieur du cercle C' décrit de a comme centre avec le rayon R' :

$$R' = R\left(1 - e^{-\frac{1}{3M}}\right), \qquad (R' < R);$$

elles sont donc développables, dans ce cercle, en séries de Taylor absolument convergentes, ordonnées suivant les puissances croissantes de $x - a$, et manquant de terme constant, puisque, pour $x = a$, on a $Y = b$ et $Z = c$.

Or, cherchons à déterminer directement les coefficients de ces deux séries en partant du système canonique (12) qu'elles vérifient. En écrivant

$$(15) \qquad \begin{cases} Y = b + (x - a)\,Y'_a + \frac{1}{2}(x - a)^2\,Y''_a + \ldots \\ Z = c + (x - a)\,Z'_a + \ldots. \end{cases}$$

nous aurons évidemment, en vertu de (11),

$$(16) \qquad Y_a^{(n)} = \Phi_n, \qquad Z_a^{(n)} = \Psi_n,$$

Φ_n et Ψ_n étant les polynomes (11), où l'on a remplacé les quantités $\varphi_1(a, b, c)$, $\varphi_2(a, b, c)$ et leurs dérivées partielles par les valeurs des seconds membres de (12) et de leurs dérivées partielles homologues, au point a, b, c. Or, d'après la Remarque du n° **321**, ces dernières quantités sont supérieures respectivement aux modules des premières; il résulte dès lors des équations (16), puisque les coefficients numériques des polynomes Φ_n et Ψ_n sont tous positifs, que l'on aura

$$Y_a^{(n)} > \operatorname{mod} y_a^{(n)}, \qquad Z_a^{(n)} > \operatorname{mod} z_a^{(n)}.$$

Donc, puisque les séries (15) convergent absolument dans le cercle C', de centre a et de rayon R', il en est de même, *a fortiori*, des séries (9); celles-ci, en vertu des propriétés des séries de puissances, définissent ainsi deux fonctions, y et z, qui sont holomorphes à l'intérieur du cercle considéré, qui se réduisent

à b et c pour $x=a$, et vérifient, *d'après leur mode même de formation* [1], le système proposé (8).

Le théorème de Cauchy est donc établi.

323. Remarque. — Les séries (9) convergent sûrement dans le cercle C' qui est le cercle de convergence des séries (15), mais rien ne prouve qu'elles ne convergent pas dans un cercle de même centre, a, et de rayon plus grand.

324. Énoncé général du Théorème de Cauchy. — La démonstration ci-dessus s'étend sans difficulté à un système canonique d'ordre quelconque, et l'on peut énoncer le théorème suivant.

Soit un système canonique d'ordre n :

$$(\mathrm{S})\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \varphi_1(x, y, z, u, \ldots), \\ \frac{dz}{dx} &= \varphi_2(x, y, z, u, \ldots), \\ \frac{du}{dx} &= \varphi_3(x, y, z, u, \ldots), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

Si les fonctions φ_1, φ_2, ..., considérées comme fonctions des variables indépendantes x, y, z, u, ..., sont holomorphes lorsque ces variables restent respectivement à l'intérieur et sur le contour de cercles $C_1, C_2, \ldots, C_{n+1}$, *de même rayon,* R, *décrits des points $x=a$, $y=b$, $z=c$, ... comme centres, le système* (S) *est vérifié par des fonctions y, z, u, ... de la variable x, qui prennent, pour $x=a$, les valeurs b, c, ..., et*

---

[1] On peut préciser ce point. Observons d'abord que, si $\mathrm{mod}(x-a)$ a une valeur ρ, inférieure à R', $\mathrm{mod}(y-b)$ et $\mathrm{mod}(z-c)$ sont, par (9) et (15), inférieurs aux valeurs que prennent $Y-b$ et $Z-c$ pour $x-a=\rho$, et par suite, en vertu de (14), inférieurs à R : il en résulte immédiatement que $\varphi_1(x, y, z)$ et $\varphi_2(x, y, z)$, considérés comme fonctions de x, sont holomorphes dans le cercle C'. Si maintenant on remplace y et z par les séries (9) dans les deux équations différentielles (8), les deux membres de chaque équation deviennent des fonctions de x, holomorphes dans le cercle C', et qui, en vertu de (10), ont mêmes dérivées de tous ordres pour $x=a$. Elles ont donc même développement taylorien dans C' suivant les puissances croissantes de $x-a$, c'est-à-dire qu'elles sont identiques dans le cercle C'. C. Q. F. D.

qui sont holomorphes quand la variable x reste à l'intérieur d'un cercle de centre a.

Le rayon, R'', de ce cercle n'est pas connu d'une manière exacte; il est certainement au moins égal à la quantité R' :

$$R' = R\left(1 - e^{-\frac{1}{(n+1)M}}\right),$$

où M désigne le maximum du module des fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, lorsque x, y, ... restent respectivement sur les circonférences C_1, C_2, ...

Corollaire. — *L'intégrale générale d'un système canonique d'ordre n dépend de n constantes arbitraires,* à savoir les valeurs $b, c, \ldots$, des n inconnues $y, z, \ldots$, pour $x = a$.

325. Remarque. — Appelons *système d'intégrales de* (S) l'ensemble des intégrales y, z, u, ..., qui, pour $x = a$, prennent des valeurs données, $b, c, \ldots$. Laissons a fixe, et donnons à $b, c, \ldots$ d'autres valeurs, b_1, c_1, ...; nous obtenons un nouveau système d'intégrales, y_1, z_1, u_1, ..., qui, si les conditions du théorème précédent sont vérifiées, sont des fonctions holomorphes de x dans un cercle de centre $x = a$ et de rayon R''_1. Ce rayon ne sera pas généralement le même que R'': soit, par exemple, $R''_1 < R''$; les intégrales y_1, z_1, u_1, ... pourront alors ne pas être holomorphes et avoir des points critiques dans une région (la couronne comprise entre les cercles de rayons R''_1 et R'' et de centre a) où les intégrales y, z, u, ... sont sûrement holomorphes, c'est-à-dire que les points critiques d'un système d'intégrales dépendent des valeurs des constantes qui caractérisent ce système. C'est ce qu'on exprime en disant que *les points critiques des intégrales d'un système d'équations différentielles ne sont généralement pas fixes.*

326. Systèmes linéaires. — Il y a toutefois un cas important où ces points critiques sont toujours fixes; c'est celui des *systèmes linéaires.*

On nomme *systèmes canoniques linéaires* ceux où les inconnues figurent linéairement; ainsi le système linéaire d'ordre deux

est de la forme

$$\frac{dy}{dx} = Ly + Mz + N,$$

$$\frac{dz}{dx} = Py + Qz + R,$$

L, M, ..., R étant des fonctions de la variable x seule.

327. Théorème. — *Les intégrales d'un système linéaire ne peuvent admettre comme points critiques que les points critiques des fonctions* L, M, ..., R, *coefficients du système linéaire.*

Soient en effet b et c des constantes quelconques; écrivons le système linéaire proposé (en le supposant du second ordre pour simplifier) sous la forme

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = L[y-b] + M[z-c] + S, \\ \dfrac{dz}{dx} = P[y-b] + Q[z-c] + T; \end{cases}$$

S, c'est-à-dire $N + Lb + Mc$, et T sont encore des fonctions de x seul.

Supposons que les fonctions L, M, ..., R (et, par suite, S et T) *soient des fonctions holomorphes de x, lorsque cette variable reste dans un cercle de centre a et de rayon* R.

Soit μ le maximum du module des fonctions L, M, S, P, Q, T lorsque x reste sur la circonférence du cercle ci-dessus; on aura (n° 116), en désignant par $L^{(n)}(a)$ la dérivée $n^{\text{ième}}$ de $L(x)$ pour $x = a$,

$$(2) \qquad \operatorname{mod} L^{(n)}(a) \leqq \frac{1.2\ldots n}{R^n}\,\mu,$$

et les dérivées d'ordre n de M, S, P, Q, T satisfont à la *même* inégalité.

Cela posé, si le système (1) admet des solutions, y et z, holomorphes au voisinage du point $x = a$, et prenant en ce point les valeurs b et c, on pourra, comme au n° 322, déterminer les coefficients de leurs développements tayloriens

$$(3) \qquad \begin{cases} y = b + (x-a)y'_a + \dfrac{1}{2}(x-a)^2 y''_a + \ldots, \\ z = c + (x-a)\,z'_a + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

et l'on trouvera, en général,

$$(4) \qquad y_a^{(n)} = \Phi_n, \qquad z_a^{(n)} = \Psi_n,$$

Φ_n et Ψ_n étant des polynomes entiers par rapport aux quantités $L(a)$, $L'(a)$, ..., $L^{(n)}(a)$, ..., $T^{(n)}(a)$, polynomes dont tous les coefficients sont positifs. Considérons maintenant le système qu'on obtient en remplaçant, dans (1), les fonctions L, M, S, P, Q, T par une *même* fonction $\varphi(x)$, définie par

$$(5) \qquad \varphi(x) = \mu \frac{1}{1 - \frac{x-a}{R}},$$

c'est-à-dire le système

$$(6) \qquad \frac{dY}{dx} = \frac{dZ}{dx} = \varphi(x)[Y - b + Z - c + 1],$$

où Y et Z prennent les valeurs b et c pour $x = a$.

En déterminant les dérivées de Y et de Z pour $x = a$, on trouverait, d'après (4),

$$Y_a^{(n)} = \Phi_n, \qquad Z_a^{(n)} = \Psi_n,$$

L, M, ... et leurs dérivées étant remplacées, dans les polynomes Φ_n et Ψ_n, par $\varphi(x)$ et ses dérivées du même ordre. Or, en vertu des inégalités (2), mod $L^n(a)$, mod $M^{(n)}(a)$, ... sont inférieurs à $\varphi^{(n)}(a)$; mod L, ... sont inférieurs à $\varphi(a)$; et, par suite, on a

$$Y_a^{(n)} \geqq \operatorname{mod} y_a^{(n)}, \qquad Z_a^{(n)} \geqq \operatorname{mod} z_a^{(n)}.$$

On en conclut, comme au n° 322, que les séries (3) convergent et représentent des fonctions holomorphes de x, dans tout cercle de centre a, où les fonctions Y et Z sont elles-mêmes holomorphes. Or il est facile d'obtenir directement Y et Z.

On a en effet, par (6),

$$\frac{dY}{dx} = \frac{dZ}{dx},$$

d'où

$$Y - b = Z - c,$$

et, par suite,

$$\frac{dY}{dx} = \varphi(x)[1 + 2(Y - b)] = \mu \frac{1 + 2(Y - b)}{1 - \frac{x-a}{R}};$$

ou, en séparant les variables,

$$\frac{dY}{1+2(Y-b)} = \mu \frac{dx}{1-\frac{x-a}{R}}.$$

Intégrons :

$$\frac{1}{2}\log[1+2(Y-b)] = -\mu R \log\left(1-\frac{x-a}{R}\right) + \text{const.}$$

Pour $x=a$, on doit avoir $Y=b$; la constante est donc nulle, et l'on a finalement

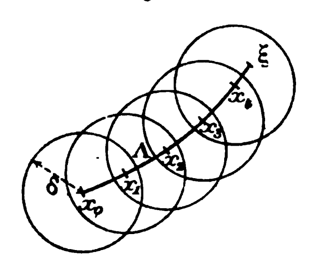
$$Y-b = Z-c = -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(1-\frac{x-a}{R}\right)^{-2\mu R}.$$

Les fonctions Y et Z ainsi définies sont, d'après cette expression même, holomorphes dans le cercle de centre a et de rayon R, car leur seul point critique possible est $x=a+R$; donc, en vertu de ce qui précède :

Les intégrales y et z du système (1) *qui prennent des valeurs déterminées quelconques, b et c, pour $x=a$, sont holomorphes dans tout cercle de centre a où les fonctions* L, M, ..., *de x, sont elles-mêmes holomorphes.*

Je dis qu'il résulte de là que des solutions *quelconques*, y_1, z_1, du système linéaire proposé, ne peuvent admettre comme point

Fig. 68.



critique un point $x=\xi$, différent des points critiques des fonctions coefficients L, M, ... du système.

Soit, en effet, x_0 un point quelconque où y_1 et z_1 aient des valeurs *déterminées;* joignons-le au point ξ par une ligne quelconque A, ne traversant aucun des points critiques de L, M, ...

et désignons par δ un nombre moindre que la plus petite distance de tous ces points critiques à la ligne A. D'après ce qui précède. les fonctions y_1 et z_1 sont holomorphes dans un cercle de centre x_0 et de rayon δ, puisque ce cercle ne contient aucun point critique de L, M, ... et que y_1 et z_1 ont des valeurs déterminées en x_0. Soit x_1 un point quelconque intérieur à ce cercle et situé sur la ligne A entre x_0 et ξ, les fonctions y_1 et z_1 sont encore holomorphes dans un cercle de centre x_1 et de rayon δ; soit de même x_2 un point de ce cercle, situé sur la ligne A entre x_1 et ξ, les fonctions y_1 et z_1 seront holomorphes dans un cercle de centre x_2 et de rayon δ. En continuant ce raisonnement, on arrive à établir que y_1 et z_1 sont holomorphes dans un cercle de rayon δ contenant le point ξ : ce dernier point ne saurait donc être critique pour aucune des solutions y_1 et z_1. Nous avons ainsi établi le théorème proposé, c'est-à-dire que les points critiques des intégrales d'un système linéaire ne peuvent être que ceux des fonctions coefficients du système. C. Q. F. D.

328. **Application à l'équation différentielle générale.** — D'après le n° 317 on peut ramener à un système canonique l'équation différentielle générale d'ordre n, à une inconnue

$$(1) \qquad \frac{d^n y}{dx^n} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right).$$

Il suffit de poser

$$(\mathrm{S}) \qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{dy}{dx} = y', \\ &\frac{dy'}{dx} = y'', \\ &\ldots\ldots\ldots \\ &\frac{dy^{(n-2)}}{dx} = y^{(n-1)}, \\ &\text{d'où} \\ &\frac{dy^{(n-1)}}{dx} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}), \end{aligned}\right.$$

et l'on a ainsi un système canonique (S), à n inconnues $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$. Il résulte dès lors du théorème général que l'équation (1) a une intégrale y, jouissant de ces propriétés : 1° pour $x = a$,

la fonction y et ses $(n-1)$ premières dérivées ont des valeurs données $b, c, \ldots, l$; 2° y est holomorphe dans un cercle de centre a et de rayon non nul, ce rayon n'étant d'ailleurs pas connu d'une manière précise. Il faut toutefois que le système de valeurs $x=a$, $y=b$, $y'=c, \ldots, y^{(n-1)}=l$ ne soit pas critique pour

$$f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}),$$

considérée comme fonction des $(n+1)$ variables indépendantes $x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}$.

Intégration par des séries. — L'intégrale y ainsi définie est développable, autour du point $x=a$, en série de Taylor de la forme

$$y = b + c(x-a) + \frac{1}{2}d(x-a)^2 + \ldots\ldots$$
$$+ \frac{1}{(n-1)!}l(x-a)^{n-1} + \lambda_n(x-a)^n + \lambda_{n+1}(x-a)^{n+1} + \ldots,$$

où les n premiers coefficients sont connus, puisque, pour $x=a$, y et ses $(n-1)$ premières dérivées se réduisent respectivement à $b, c, d, \ldots, l$. On déterminera les autres coefficients $\lambda_n, \lambda_{n+1}, \ldots$, soit par substitution directe de la série y dans (1), soit par la méthode générale du n° **322**.

On obtiendra ainsi une série qui vérifie l'équation proposée et qui converge certainement dans un cercle de centre a et de rayon R′, ce rayon étant celui qui a été défini au n° **324**.

Équations linéaires. — Une *équation linéaire* par rapport à y et à ses dérivées, de la forme

$$(2) \qquad A\frac{d^n y}{dx^n} + B\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + L\frac{dy}{dx} + My = N,$$

où A, B, ..., L, M, N sont des fonctions de x seul, se ramène au système canonique *linéaire* :

$$\frac{dy}{dx} = y', \qquad \frac{dy'}{dx} = y'', \qquad \ldots, \qquad \frac{dy^{(n-2)}}{dx} = y^{(n-1)},$$
$$\frac{dy^{(n-1)}}{dx} = -\left(\frac{B}{A}y^{(n-1)} + \ldots + \frac{L}{A}y' + \frac{M}{A}y\right) + \frac{N}{A}.$$

Donc, d'après le n° **327**, les intégrales de l'équation (2) n'auront

pas d'autres points critiques que ceux des coefficients $\frac{B}{A}, \dots, \frac{M}{A}, \frac{N}{A}$, c'est-à-dire :

1° Les points critiques des fonctions A, B, ..., L, M, N de x;
2° Les points où $A(x)$ s'annule.

Par exemple, si A, B, ..., L, M, N sont des polynomes entiers en x, l'intégrale générale de (2) ne pourra avoir d'autres points critiques à distance finie que les zéros de A.

Si a est un point ordinaire des fonctions coefficients $\frac{B}{A}, \dots,$ on pourra développer l'intégrale générale de l'équation (2) en série de Taylor, ordonnée suivant les puissances croissantes de $x - a$, et convergente dans un cercle ayant pour centre a et pour rayon la distance de ce point au point critique le plus voisin des fonctions coefficients.

Corollaire. — Revenons à l'équation différentielle générale (1), d'ordre n; il résulte de ce qui précède que son intégrale générale dépend de n constantes arbitraires, à savoir $b, c, \dots, l$, ainsi qu'on l'avait annoncé au n° 239.

329. Intégrales premières d'un système. — En vertu du théorème général de Cauchy, étant donné un système canonique d'ordre n :

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \frac{dy_2}{dx} &= f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \frac{dy_n}{dx} &= f_n(x, y_1, \dots, \dots, y_n), \end{aligned} \right.$$

la solution générale $y_1, y_2, \dots, y_n$ doit renfermer n constantes arbitraires; on a donc

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} y_1 &= \varphi_1(x, c_1, c_2, \dots, c_n), \\ y_2 &= \varphi_2(x, c_1, \dots, \dots, c_n), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ y_n &= \varphi_n(x, c_1, \dots, \dots, c_n). \end{aligned} \right.$$

Si nous résolvons ces équations par rapport aux n constantes

$c_1, c_2, \ldots, c_n$, nous avons

$$(5)\qquad \begin{cases} c_1 = F_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ c_2 = F_2(x, y_1, \ldots, \ldots, y_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_n = F_n(x, y_1, \ldots, \ldots, y_n), \end{cases}$$

ce qui est une forme équivalente de la solution générale (4).

Chacune des fonctions F_1, F_2, ... se nomme une *intégrale première* du système (3); ces n fonctions sont distinctes, c'est-à-dire ne sont liées par aucune relation : car si F_n était fonction de $F_1, F_2, \ldots, F_{n-1}$, les équations (5) montrent que la constante c_n serait déterminée quand $c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}$ seraient donnés, en sorte que la solution générale du système ne contiendrait que $n-1$ constantes *arbitraires*.

D'une manière générale, on nomme *intégrale première* toute fonction de $x, y_1, \ldots, y_n$ qui reste constante quand on y remplace $y_1, y_2, \ldots, y_n$ par les fonctions de x les plus générales satisfaisant au système proposé : il est clair, d'après cela, que toute fonction de deux ou plusieurs intégrales premières est encore une intégrale première. Comme d'ailleurs le système ne saurait admettre plus de n intégrales premières *distinctes* (sinon il y aurait, dans la solution générale, plus de n constantes arbitraires), la forme *générale* des intégrales premières est évidemment

$$f(F_1, F_2, \ldots, F_n),$$

f étant une fonction arbitraire.

On reviendra sur ces intégrales dans la théorie des équations aux dérivées partielles, où elles jouent un rôle fondamental; observons seulement ici que la connaissance d'une intégrale première permet d'abaisser d'une unité l'ordre du système. Car si l'on a

$$F(x, y_1, \ldots, y_n) = \text{const.},$$

on tirera de cette équation la valeur de y_n, en fonction de $x, y_1, \ldots, y_{n-1}$, valeur qu'on portera dans les $(n-1)$ premières équations du système (3) : on aura ainsi un système d'ordre $n-1$, les inconnues étant $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$. De même, la connaissance de k intégrales premières distinctes permet d'abaisser l'ordre du système de k unités.

Dans le *cas d'une seule équation différentielle* d'ordre n, une *intégrale première* sera une fonction de $x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$, qui reste constante quand on y remplace y par la fonction de x la plus générale satisfaisant à l'équation proposée : car cette équation se ramène (n° 328) à un système d'ordre n, où les inconnues sont $y, y'\left(=\frac{dy}{dx}\right), \ldots, y^{(n-1)}\left(=\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)$.

Par exemple, pour une équation du second ordre, une intégrale première sera de la forme $F(x, y, y') = C$.

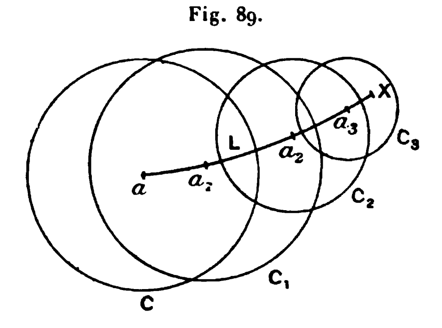
330. **Étude des solutions d'un système.** — Soit, par exemple, un système d'ordre *deux* :

$$\frac{dy}{dx} = \varphi_1(x, y, z), \qquad \frac{dz}{dx} = \varphi_2(x, y, z);$$

si le système de valeurs a, b, c n'est pas critique pour les fonctions φ_1 et φ_2, le système admettra comme solution deux fonctions holomorphes, y et z, égales à b et c, pour $x = a$.

Proposons-nous de calculer les valeurs que prennent ces intégrales en un point $x = X$, du plan de la variable x, lorsque cette variable va de a à X, en suivant une ligne donnée L.

Fig. 89.



Les deux fonctions y et z sont représentées, aux environs du point $x = a$, par des séries

$$y = b + \lambda_1(x - a) + \ldots,$$
$$z = c + \mu_1(x - a) + \ldots,$$

qui sont convergentes dans un cercle C (*fig.* 89) de centre a;

elles donnent donc les valeurs de y, z pour tous les points de la ligne L intérieurs à C.

Soit a_1 un de ces points, voisin de la circonférence du cercle C; en a_1, y et z ont les valeurs b_1 et c_1 et sont représentées, aux environs de $x = a_1$, par des séries

$$y = b_1 + \lambda'_1(x - a_1) + \ldots, \qquad z = c_1 + \mu'_1(x - a_1) + \ldots,$$

convergentes dans un cercle C_1 de centre a_1. Elles font connaître y et z le long d'un nouveau tronçon de la ligne L, et, en continuant ainsi jusqu'à ce qu'on arrive au point X, on obtiendra en ce point les valeurs cherchées de y et de z.

Mais il peut se faire que les rayons de cercles successifs C_1, C_2, C_3, ... tendent vers zéro quand x tend vers un point ξ de la ligne L : en ce cas, on ne pourra prolonger les fonctions y et z sur cette ligne au delà du point ξ, à moins d'une étude spéciale dans chaque cas. La méthode générale tombe alors en défaut.

Si cette circonstance se présente, désignons par η et ζ les valeurs vers lesquelles tendent y et z quand x tend vers ξ en suivant la ligne L, de a en ξ (¹) : le système de valeurs ξ, η, ζ est critique pour l'une au moins des fonctions $\varphi_1(x, y, z)$ et $\varphi_2(x, y, z)$, sinon on pourrait tracer autour du point $x = \xi$ un nouveau cercle, de rayon non nul, à l'intérieur duquel les solutions y et z du système, qui, pour $x = \xi$, ont les valeurs η et ζ, seraient encore holomorphes (²), ce qui permettrait de prolonger ces fonctions sur la ligne L, au delà du point $x = \xi$.

La méthode ne peut donc être en défaut que si l'un des systèmes de valeurs successifs de x, y, z le long de la ligne L est critique (³) pour une des fonctions φ_1, φ_2, ou si un point de la ligne L est un point d'indétermination pour y ou z. Si ces cas ne se présentent pas, on aura *prolongé* y et z non seulement le long de L, mais dans toute la région du plan recouverte par les cercles

(¹) Cela suppose que η et ζ existent, c'est-à-dire que le point $x = \xi$ n'est pas un point d'indétermination pour les fonctions y et z.

(²) Nous admettons ici, sans démonstration, que le système n'a pas d'autres solutions, y et z, se réduisant à η et ζ pour $x = \xi$, que les solutions holomorphes. (*Voir* l'Exercice XVIII, à la fin du Volume.)

(³) Parmi ces systèmes critiques a, b, c, figurent ceux où a, b ou c sont infinis : car le théorème fondamental de Cauchy suppose ces quantités finies.

successifs C, C_1, C_2, ...; à l'intérieur de cette région, les fonctions y et z, solutions du système proposé et égales à b et c pour $x = a$, sont des fonctions holomorphes de x.

Remarque. — Si le système canonique considéré est *linéaire*, la méthode précédente ne sera jamais en défaut, pourvu toutefois que la ligne L ne passe par aucun point critique des fonctions de x coefficients du système : en effet, les cercles successifs dont on fait usage ont alors un rayon constant (n° 327), ce qui permet d'atteindre toujours le point X.

II. — APPLICATION DU THÉORÈME DE CAUCHY.

331. On a admis sans démonstration (n° 159) que la fonction inverse de l'intégrale elliptique de première espèce, c'est-à-dire la fonction z, de u, définie par l'équation différentielle

$$\frac{dz}{du} = \sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}, \tag{1}$$

est monodrome et méromorphe dans tout le plan de la variable u.

Le théorème de Cauchy permet d'établir comme il suit cette importante proposition.

332. Lemme. — *La fonction z, de u, n'a pas de point d'indétermination à distance finie dans le plan de la variable u.*

Soit, en effet, $z(u)$ une solution *quelconque* de l'équation (1); je dis que le point $u = \alpha$ ne peut être un point d'indétermination de z, c'est-à-dire un point singulier essentiel. Considérons à cet effet une solution *particulière* $z_1(u)$, de l'équation (1), qui, pour $u = \alpha$, prenne une valeur arbitrairement choisie β, telle toutefois que $4\beta^3 - g_2\beta - g_3$ ne soit pas nul : β n'étant pas racine du polynome en z sous le radical, ce radical, $\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}$, considéré comme fonction de z, est holomorphe autour du point $z = \beta$; il en résulte, d'après le théorème de Cauchy, que $z_1(u)$ sera holomorphe dans un certain cercle ayant pour centre le point $u = \alpha$.

Les relations

$$\frac{dz}{du} = \sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}, \qquad \frac{dz_1}{du} = \sqrt{4z_1^3 - g_2 z_1 - g_3}$$

donnent

$$\frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}} - \frac{dz_1}{\sqrt{4z_1^3 - g_2 z_1 - g_3}} = 0,$$

ce qui est, entre z et z_1 l'équation d'Euler (n° **288**) : z et z_1 sont donc (n° **290**) liés par une relation *algébrique*. Or une équation algébrique, $f(z, z_1) = 0$, donne pour z, quel que soit z_1, des valeurs finies ou infinies, mais jamais indéterminées ; en particulier, pour $u = \alpha$, c'est-à-dire pour $z_1 = \beta$, la fonction z n'est pas indéterminée. C. Q. F. D.

333. Cela posé, reprenons l'équation différentielle (1), en l'écrivant

$$(2) \qquad \frac{dz}{du} = 2\sqrt{(z - e_1)(z - e_2)(z - e_3)},$$

où e_1, e_2, e_3 sont supposés distincts.

Soient u_0 et z_0 deux constantes. Si z_0 n'est égal à aucune des racines e_α, le radical en z est une fonction holomorphe de z autour du point $z = z_0$: le théorème fondamental sur l'existence des intégrales nous apprend alors que l'équation (2) admet une solution, z, qui se réduit à z_0 pour $u = u_0$, et que *cette solution est fonction holomorphe de u dans un certain cercle de centre* u_0.

Suivons de proche en proche la variation de cette fonction quand la variable u se déplace à partir du point $u = u_0$: d'après le théorème fondamental et le n° 330, un point, u_1, ne pourra être critique pour la fonction z que si c'est un point d'indétermination pour z, cas à écarter d'après le Lemme, ou si z prend en ce point une valeur z_1, telle que le système (u_1, z_1) soit critique pour le second membre de l'équation (2), considéré comme fonction des variables indépendantes u et z. Or u ne figure pas au second membre de (2), qui est le radical $\sqrt{4(z - e_1)(z - e_2)(z - e_3)}$, et qui n'a comme points critiques, en z, que $z = e_1$, e_2, e_3 et ∞. Donc les seuls points critiques possibles de la fonction z, de u,

seront les points u_1, u_2, ... où cette fonction prend une des valeurs e_1, e_2, e_3, ∞. Examinons-les successivement.

1° Si, pour $u = u_1$, z devient égal à e_1, je dis que le point u_1 ne sera pas critique pour z. Posons en effet

$$z = e_1 + t^2,$$

l'équation (2) devient

$$\frac{dt}{du} = \sqrt{(e_1 - e_2 + t^2)(e_1 - e_3 + t^2)}$$

Or le système de valeurs $u = u_1$, $t = 0$ n'est pas critique pour le nouveau second membre, car le radical ne s'annule pas pour $t = 0$, puisque e_1, e_2, e_3 sont distincts. Il en résulte que u_1 est un point ordinaire pour la solution t qui se réduit à o pour $u = u_1$ (¹), et par suite aussi pour z, égal à $e_1 + t^2$.

2° Si, pour $u = u_1$, z devient infini, je dis que le point u_1 est un pôle de z. Posons en effet

$$z = \frac{1}{t^2};$$

l'équation (2) devient, après division des deux membres par $\frac{1}{t^3}$,

$$(3) \qquad -2\frac{dt}{du} = 2\sqrt{(1 - e_1 t^2)(1 - e_2 t^2)(1 - e_3 t^2)}.$$

Là encore, le radical ne s'annule pas pour $t = 0$; il en résulte que la solution t, qui se réduit à o pour $u = u_1$, est fonction *holomorphe* de u autour du point u_1; et il en est par suite de même de t^2. Donc $z = \frac{1}{t^2}$ est *méromorphe* autour de ce point, qui est un pôle de z, d'après la définition même des pôles.

Ainsi la fonction z, de u, n'admet pas, dans le plan de la variable u, d'autres points critiques que des pôles; c'est donc, par définition, une fonction méromorphe de u.

On a vu, aux nos 158-159, qu'en admettant cette propriété, on démontre que z est fonction elliptique de u, du second ordre.

334. **Remarque.** — Cette démonstration ne suppose nullement

(¹) On admet que cette solution est unique. *Voir* à ce sujet l'Exercice XVIII, à la fin du Volume.

que $e_1 + e_2 + e_3$ soit nul, ni que le coefficient du terme en z^3 sous le radical soit 4.

335. Généralisation. — Si le polynome sous le radical est du quatrième degré au lieu d'être du troisième, ces résulats subsistent. Soit en effet l'équation différentielle

$$(4)\qquad \frac{dz}{du} = \sqrt{A(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)(z-a_4)} \qquad (a_i \gtrless a_j),$$

on voit, comme plus haut, que la fonction z, de u (qui n'a pas de point d'indétermination à distance finie) ([1]), ne peut cesser d'être holomorphe que pour les points $u = u_1$ où elle devient infinie ou égale à une des racines a_i. Or: 1° si, pour $u = u_1$, z est égal à a_1, on voit que u_1 n'est pas critique en posant $z = a_1 + t^2$; 2° si, pour $u = u_1$, z est égal à l'infini, on voit que u_1 est *pôle* de z en posant $z = \frac{1}{t}$.

De plus z est encore une *fonction elliptique* de u. On le montrerait en suivant la marche du n° 159, ou encore en ramenant le polynome sous le radical au troisième ordre par la substitution

$$\frac{1}{z-a_1} = t, \qquad z = a_1 + \frac{1}{t},$$

ce qui donne, dans (4), après division des deux membres par $\frac{1}{t^2}$,

$$-\frac{dt}{du} = \sqrt{\text{Polynome du troisième ordre en } t.}$$

Alors t étant (n° 333) fonction elliptique de u, du second ordre, z, ou $a_1 + \frac{1}{t}$, est également elliptique, et du second ordre.

336. Remarque. — Si l'on prend sous le radical, dans l'équation (4) ci-dessus, un polynome, Z, d'ordre n supérieur à *quatre*, on ne peut plus établir que z est fonction monodrome de u.

On verrait bien, comme plus haut, que les points $u = u_1$, pour lesquels la fonction z devient égale à une des racines du

---

(1) La démonstration de ce point est la même que celle du Lemme ci-dessus (n° 332); on s'appuie toujours sur l'intégration algébrique de l'équation d'Euler.

polynome Z, ne sont pas des points critiques; mais pour les points $u = u_1$, où z devient infini, le raisonnement ci-dessus est inapplicable, et u_1 n'est pas nécessairement un pôle de z. En effet, si c'est un pôle d'ordre h, on aura $z = \frac{\varphi(u)}{(u - u_1)^h}$, $\varphi(u)$ étant holomorphe autour du point u_1 et ne s'annulant pas en ce point. Sous une autre forme la quantité $z^{-\frac{1}{h}}$, c'est-à-dire $\frac{u - u_1}{[\varphi(u)]^{\frac{1}{h}}}$, sera : 1° nulle pour $u = u_1$; 2° holomorphe autour de ce point; et réciproquement si $z^{-\frac{1}{h}}$ jouit de ces deux propriétés, le point u_1 sera pour z un pôle d'ordre h.

Or si l'on pose $z^{-\frac{1}{h}} = t$ dans l'équation différentielle proposée,

$$\frac{dz}{du} = \sqrt{Az^n + Bz^{n-1} + \ldots + L},$$

celle-ci devient

$$\frac{-h}{t^{h+1}} \frac{dt}{du} = \sqrt{\frac{A}{t^{hn}} + \frac{B}{t^{h(n-1)}} + \ldots},$$

c'est-à-dire

$$-h \frac{dt}{du} = t^{h+1-\frac{hn}{2}} \sqrt{A + Bt^h + \ldots}.$$

Le second membre est infini pour $t = 0$, quel que soit l'entier positif h, dès que n est supérieur à quatre; on n'est donc plus certain que la solution t de l'équation ci-dessus, qui se réduit à zéro pour $u = u_1$, soit holomorphe autour du point u_1.

CHAPITRE IV.

ÉQUATIONS LINÉAIRES.

I. — GÉNÉRALITÉS.

337. **Définitions.** — On appelle *équations linéaires* celles dans lesquelles la fonction inconnue et ses dérivées n'entrent qu'au premier degré et ne sont pas multipliées entre elles; leur forme générale est

$$\frac{d^n y}{dx^n} + P\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + T\frac{dy}{dx} + Uy = V;$$

P, ..., T, U, V étant des fonctions de x seul.

L'équation est dite *sans second membre* si V est nul, c'est-à-dire si elle est non seulement *linéaire,* mais *homogène,* par rapport à y et à ses dérivées.

D'après cela, l'équation linéaire d'ordre n sans second membre rentre dans le troisième cas de réduction (n° 296) et peut se ramener à l'ordre $(n-1)$ par la substitution $y = e^z$; mais l'avantage est généralement illusoire, la nouvelle équation étant plus compliquée que l'ancienne et, surtout, n'ayant plus la forme linéaire.

338. **Exemple.** — L'équation linéaire du second ordre sans second membre,

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + P\frac{dy}{dx} + Qy = 0,$$

si l'on y pose $y = e^z$, devient

$$z'' + z'^2 + Pz' + Q = 0,$$

équation de Riccati quand on prend z' pour inconnue. On saura l'intégrer si l'on en a une solution; mais nous verrons

plus loin (n° 344) que l'équation linéaire du second ordre s'intègre également, et avec simplicité, si l'on en connaît une solution. La transformation n'a donc pas d'avantage.

Équations linéaires sans second membre.

339. Soit l'équation

$$\frac{d^n y}{dx^n} + \mathrm{P}\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + \mathrm{T}\frac{dy}{dx} + \mathrm{U}y = 0; \tag{1}$$

si nous désignons, pour un instant, le premier membre par $\mathrm{F}(y)$, on a identiquement, grâce à la forme linéaire et homogène,

$$\mathrm{F}(cy) = c\mathrm{F}(y), \qquad \text{si } c \text{ est une constante,}$$
$$\mathrm{F}(y_1 + y_2) = \mathrm{F}(y_1) + \mathrm{F}(y_2).$$

Il en résulte que si y_1 et y_2 sont des solutions de l'équation (1), $c_1 y_1$ et $c_2 y_2$ sont aussi des solutions, ainsi que $c_1 y_1 + c_2 y_2$, c_1 et c_2 désignant des constantes; et, en général, si $y_1, y_2, y_3, \ldots$ sont des solutions, $c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 + \ldots$ en sera une autre.

340. Théorème fondamental. — *On peut déterminer n solutions, $y_1, y_2, \ldots, y_n$, de la proposée* (1), *telles que toutes les autres soient de la forme $c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n$.*

En effet, le théorème est vrai pour $n = 1$, car l'équation (1) est alors

$$\frac{dy}{dx} + \mathrm{P}y = 0;$$

d'où

$$\frac{dy}{y} = -\mathrm{P}\,dx, \qquad \log y = -\int \mathrm{P}\,dx + \log c_1$$

$$y = c_1 e^{-\int \mathrm{P}\,dx}, \qquad \text{ou} \qquad y = c_1 y_1.$$

Démontrons maintenant que le théorème est vrai pour une valeur de n s'il est vrai pour la valeur $n - 1$.

Soit y_1 une solution quelconque de la proposée (1); posons $y = cy_1$, c étant la nouvelle inconnue; nous avons

$$y = cy_1; \quad y' = c'y_1 + cy'_1; \quad y'' = c''y_1 + 2c'y'_1 + cy''_1; \quad \ldots \quad \ldots;$$

expressions linéaires et homogènes en c, c', c'', ... Substituant ces valeurs dans (1), on obtiendra donc une équation linéaire et homogène en c, c', c'', ..., $c^{(n)}$. Cette équation ne renfermera pas de terme en c, car le coefficient de c y sera

$$y_1^{(n)} + \mathrm{P} y_1^{(n-1)} + \ldots + \mathrm{T} y_1' + \mathrm{U} y_1,$$

quantité nulle, puisque y_1 est solution de (1). L'équation différentielle en c est donc de la forme

$$c^{(n)} + \mathrm{P}_1 c^{(n-1)} + \ldots + \mathrm{S}_1 c'' + \mathrm{T}_1 c' = 0,$$

équation linéaire et homogène d'ordre $n-1$ en c'. Mais le théorème à démontrer étant vrai pour l'ordre $n-1$, toutes les solutions de cette équation sont comprises dans la formule

$$c' = c_2 u_2 + c_3 u_3 + \ldots + c_n u_n,$$

c_2, ..., c_n étant des constantes arbitraires; on en conclut

$$c = c_2 \int u_2 dx + \ldots + c_n \int u_n dx + c_1,$$

d'où, pour y, la forme

$$y = c y_1 = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n.$$

Telle est l'intégrale générale de la proposée (1); c_1, ..., c_n sont des constantes arbitraires, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ des fonctions de x. Les y_i sont aussi des solutions de (1), car si l'on fait

$$c_1 = c_3 = c_4 = \ldots = c_n = 0 \quad \text{et} \quad c_2 = 1,$$

on a $y = y_2$. Le théorème fondamental est donc complètement établi; non seulement la solution générale est de la forme $c_1 y_1 + \ldots + c_n y_n$, mais il n'y a pas de solution (singulière) échappant à cette formule.

Corollaire. — Entre $(n+1)$ solutions d'une équation linéaire et homogène d'ordre n, il y a au moins une relation linéaire et homogène.

341. Remarque. — On déduit de là la solution du problème suivant :

Trouver la condition nécessaire et suffisante pour que $n+1$

fonctions de x, à savoir $y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}$, soient liées par une relation linéaire et homogène

$$(2)\qquad c_1y_1 + c_2y_2 + \ldots + c_{n+1}y_{n+1} = 0,$$

les c étant des constantes, non nulles simultanément.

Dérivons l'identité (2) par rapport à x, il vient successivement

$$(3)\qquad \begin{cases} c_1y'_1 + c_2y'_2 + \ldots + c_{n+1}y'_{n+1} = 0, \\ c_1y''_1 + c_2y''_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_1y_1^{(n)} + c_2y_2^{(n)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0. \end{cases}$$

L'équation (2) et les n équations dérivées (3) établissent, entre les $(n+1)$ constantes $c_1, c_2, \ldots, c_{n+1}$, $(n+1)$ relations linéaires et homogènes; les c n'étant pas tous nuls, le déterminant Δ,

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_{n+1} \\ y'_1 & y'_2 & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \ldots & y_{(n)}^{n+1} \end{vmatrix},$$

est nécessairement nul, quelle que soit la valeur donnée à x.

Je dis maintenant que la condition $\Delta = 0$ est suffisante. Elle exprime en effet que y_1 est solution de l'équation différentielle linéaire, homogène, et d'ordre n en y,

$$\begin{vmatrix} y & y_2 & \ldots & y_{n+1} \\ y' & y'_2 & \ldots & y'_{n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y^{(n)} & y_2^{(n)} & \ldots & y_{n+1}^{(n)} \end{vmatrix} = 0.$$

D'ailleurs $y_2, y_3, \ldots, y_{n+1}$ sont aussi des solutions, car si l'on fait $y = y_2$, le déterminant a deux colonnes identiques et s'annule. On a ainsi $(n+1)$ solutions, à savoir $y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}$, d'une équation différentielle d'ordre n, linéaire et homogène; ces solu- sont donc liées (corollaire du n° 340) par une relation linéaire et homogène.

La condition nécessaire et suffisante cherchée est ainsi : $\Delta = 0$.

342. On a vu que les solutions de l'équation proposée (1) sont

comprises dans la formule

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n,$$

y_1, y_2, ..., y_n étant des solutions convenablement choisies; je dis qu'il n'existe entre elles aucune relation linéaire et homogène. Car si l'on avait

$$y_n = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \ldots + \lambda_{n-1} y_{n-1},$$

on aurait, en portant cette valeur dans l'expression de y,

$$y = (c_1 + \lambda_1 c_n) y_1 + \ldots + (c_{n-1} + \lambda_{n-1} c_n) y_{n-1},$$

formule qui ne contient en réalité que $(n - 1)$ constantes arbitraires, $(c_1 + \lambda_1 c_n)$, ..., $(c_{n-1} + \lambda_{n-1} c_n)$, et qui ne peut par suite représenter l'intégrale générale d'une équation différentielle d'ordre n.

Réciproquement, étant données n solutions, u_1, u_2, ..., u_n, de l'équation (1), linéairement indépendantes, c'est-à-dire entre lesquelles n'existe aucune relation linéaire et homogène, on pourra mettre une solution quelconque sous la forme

$$y = d_1 u_1 + d_2 u_2 + \ldots + d_n u_n; \qquad (d_1, d_2, \ldots = \text{const.}).$$

Car u_1, u_2, ..., u_n étant des solutions de (1), on a

$$(4) \qquad \begin{cases} u_1 = \alpha_1 y_1 + \ldots + \alpha_n y_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_n = \lambda_1 y_1 + \ldots + \lambda_n y_n; \end{cases}$$

comme il n'y a pas de relation linéaire et homogène entre u_1, u_2, ..., u_n, le déterminant

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \ldots & \alpha_n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_1 & \ldots & \lambda_n \end{vmatrix}$$

n'est pas nul, et l'on peut, par suite, résoudre les équations (4) par rapport à y_1, y_2, ..., y_n: les valeurs de y_i ainsi obtenues sont linéaires et homogènes par rapport aux u_i, et dès lors l'expression

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n,$$

qui est la solution générale de la proposée (1), peut aussi se

mettre sous la forme

$$d_1 u_1 + d_2 u_2 + \ldots + d_n u_n,$$

les d_i désignant des constantes arbitraires.

On saura donc écrire immédiatement l'intégrale générale d'une équation différentielle linéaire d'ordre n, sans second membre, quand on connaîtra n solutions linéairement indépendantes.

343. Théorème. — *Si l'on connaît p solutions d'une équation linéaire sans second membre* (1), *d'ordre n,*

$$y_1, \quad y_2, \quad \ldots, \quad y_p \qquad (p < n),$$

linéairement indépendantes entre elles, on peut ramener l'intégration de la proposée à celle d'une équation linéaire sans second membre d'ordre n — p, et à p quadratures.

Faisons en effet un changement de fonction, en posant

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_p y_p,$$

c_1, c_2, ..., c_p étant p nouvelles inconnues, que nous pourrons lier par $(p-1)$ équations à notre choix [1].

Nous avons ainsi

$$y = \sum c_i y_i,$$

d'où, en dérivant,

$$y' = \sum c_i y'_i + \sum c'_i y_i.$$

---

[1] Si $y_1, y_2, \ldots, y_p$ n'étaient pas linéairement distinctes, c'est-à-dire si l'on avait

$$y_1 = \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3 + \ldots + \lambda_p y_p,$$

le changement de fonction serait

$$y = (c_2 + \lambda_2 c_1) y_2 + \ldots + (c_p + \lambda_p c_1) y_p,$$

et il n'y aurait en réalité que $p-1$ inconnues, $(c_2 + \lambda_1 c_1)$, ..., $(c_p + \lambda_p c_1)$. On n'aurait donc pas le droit d'établir entre elles $p-1$ relations : c'est pourquoi on doit supposer, dès le début, que y_1, ..., y_p ne sont liées par aucune équation linéaire et homogène.

La méthode employée dans ce paragraphe est dite *de la variation des constantes.*

Nous prendrons comme première équation entre les c l'équation

$$\left.\begin{aligned} &\sum c_i' y_i = 0. \\ &\sum c_i' y_i' = 0, \\ &\dots\dots\dots\dots \\ &\sum c_i' y_i^{(p-2)} = 0. \end{aligned}\right\} \quad (C)$$

Nous aurons ensuite

$$y' = \sum c_i y_i'' + \sum c_i' y_i'.$$

et nous poserons encore

et ainsi de suite, jusqu'à

$$y^{(p-1)} = \sum c_i y_i^{(p-1)}$$

en posant

On ne peut aller plus loin, car on a ainsi, par les équations (C), établi $p - 1$ relations entre $c_1, c_2, \ldots, c_p$.

D'après cela, $y', y'', \ldots, y^{(p-1)}$ sont les mêmes que si les $c_1, c_2, \ldots, c_p$ étaient des constantes. Continuons à dériver; il vient

$$y^{(p)} = \sum c_i y_i^{(p)} + \sum c_i' y_i^{(p-1)},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$y^{(n)} = \sum c_i y_i^{(n)} + \ldots + \sum c_i^{(n-p+1)} y_i^{(p-1)}.$$

Portant ces valeurs dans l'équation proposée (1), nous obtenons une équation $F = 0$, linéaire et homogène par rapport à $c_1, c_2, \ldots, c_p$ et à leurs dérivées jusqu'à l'ordre $n - p + 1$, car chacune des dérivées de y est fonction linéaire et homogène de ces quantités. Je dis que les termes en $c_1, c_2, \ldots, c_p$ n'y figurent pas. En effet, ces termes sont évidemment ceux qu'on obtiendrait en substituant à y, dans l'équation (1), la fonction

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_p y_p$$

où $c_1, \ldots, c_p$ sont regardés comme constants; mais cette fonction étant dans ce cas une solution de (1), le résultat de la substitution est *identiquement* nul. Donc l'équation $F = 0$ ne con-

tient pas les c_i; et son premier membre se réduit à une fonction linéaire et homogène des dérivées c'_i, c''_i, ..., $c_i^{(n-p+1)}$.

Cela posé, on peut tirer des équations (C), c'est-à-dire de

$$(C)\quad \left\{\begin{array}{l} c'_1 y_1 + c'_2 y_2 + \ldots + c'_p y_p = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c'_1 y_1^{(p-2)} + \ldots + c'_p y_p^{(p-2)} = 0, \end{array}\right.$$

les valeurs de c'_2, c'_3, ..., c'_p en fonction de c'_1 : en effet, le déterminant de ces inconnues est précisément le déterminant Δ qui, égalé à zéro, exprimerait que $y_2, \ldots, y_p$ sont liées par une relation linéaire et homogène (n° 341). Et comme on a supposé y_1, y_2, ..., y_p linéairement indépendantes, Δ n'est pas nul.

On exprime ainsi c'_2, c'_3, ..., c'_n en fonction linéaire et homogène de c'_1, sous la forme

$$c'_2 = \alpha_2 c'_1, \qquad c'_3 = \alpha_3 c'_1, \qquad \ldots, \qquad c'_n = \alpha_n c'_1,$$

α_2, α_3, ... étant des fonctions connues de x.

En dérivant ces relations, on exprime les dérivées successives de c'_2, c'_3, ... en fonction linéaire et homogène de c'_1 et de ses dérivées jusqu'au même ordre; portant ensuite ces valeurs dans l'équation $F = 0$, on obtient une équation linéaire et homogène, entre c'_1, c''_1, ..., $c_1^{(n-p+1)}$, c'est-à-dire *d'ordre* $n - p$ *par rapport à* c'_1.

Supposons qu'on puisse l'intégrer; soit c'_1 sa solution générale, on aura c_1 par une *première* quadrature; puis de la relation

$$c'_2 = \alpha_2 c'_1,$$

on déduira

$$c_2 = \int \alpha_2 c'_1\, dx,$$

et ainsi de suite, c'est-à-dire que c_2, c_3, ..., c_p s'obtiendront par $p - 1$ *nouvelles* quadratures, soit en tout p quadratures, et la solution générale de la proposée (1) sera donnée par la formule

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_p y_p.$$

Les n constantes arbitraires proviendront : 1° des $n - p$ constantes que contient c'_1, solution générale d'une équation d'ordre $n - p$; 2° des p constantes introduites par les p quadratures.

Cette méthode de *la variation des constantes* est due à Lagrange.

344. Corollaire. — Si l'on connaît $(n-1)$ solutions indépendantes de l'équation d'ordre n sans second membre, on saura l'intégrer, car on la ramènera à une équation analogue du premier ordre, qui s'intègre immédiatement par une quadrature.

En particulier, soit y_1 une solution de l'équation du second ordre

$$y'' + Py' + Qy = 0;$$

pour achever l'intégration, on posera $y = cy_1$, d'où

$$c''y_1 + c'(2y'_1 + Py_1) = 0;$$

c'est-à-dire

$$\frac{c''}{c'} + \frac{2y'_1 + Py_1}{y_1} = 0.$$

Intégrons; il vient

$$\log c' + 2\log y_1 + \int P\,dx = \log c_2,$$

ou

$$c' = c_2 \frac{1}{y_1^2} e^{-\int P\,dx}, \qquad (c_2 = \text{constante arbitraire}),$$

d'où

$$c = c_2 \int \left(\frac{1}{y_1^2} e^{-\int P\,dx}\right) dx + c_1, \qquad (c_1 = \text{constante arbitraire}),$$

et

$$y = cy_1 = c_1 y_1 + c_2 y_1 \int \left(\frac{1}{y_1^2} e^{-\int P\,dx}\right) dx.$$

C'est l'intégrale générale cherchée.

Équations linéaires avec second membre.

345. Forme de l'intégrale générale. — Soit l'équation d'ordre n

$$(5) \qquad \frac{d^n y}{dx^n} + P\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + T\frac{dy}{dx} + Uy = V,$$

linéaire et à second membre; désignons par Y_0 une quelconque de ses solutions; si nous posons

$$y = z + Y_0,$$

z étant la nouvelle inconnue, nous obtiendrons évidemment pour z l'équation

$$(6) \qquad \frac{d^n z}{dx^n} + P\frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} + \ldots + T\frac{dz}{dx} + Uz = 0,$$

ce qui montre que z est la solution générale de l'équation proposée, dans laquelle on aurait supprimé le second membre. L'intégrale de la proposée avec second membre est donc

$$(7) \qquad y = Y_0 + c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n,$$

$y_1, \ldots, y_n$ étant n solutions, linéairement indépendantes, de l'équation sans second membre.

346. **Théorème.** — *Si l'on connaît p solutions, $y_1, \ldots, y_p$, linéairement indépendantes, de l'équation sans second membre, l'intégration de l'équation avec second membre se ramène à celle d'une équation linéaire à second membre, d'ordre $n-p$, et à p quadratures.*

Il suffit, pour l'établir, de reproduire, sans aucun changement, la méthode et les calculs du n° 343.

En particulier, supposons qu'on connaisse n solutions de l'équation sans second membre, c'est-à-dire qu'on sache l'intégrer : on obtiendra, par n quadratures, l'intégrale de l'équation avec second membre.

Ainsi, *l'équation sans second membre étant intégrée, on saura intégrer l'équation avec second membre.* Cette proposition est importante; aussi allons-nous reprendre les raisonnements et calculs qui servent à l'établir.

347. Soient donc n solutions particulières, $y_1, y_2, \ldots, y_n$, linéairement indépendantes, de l'équation sans second membre; posons, dans l'équation avec second membre,

$$y_1 = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n,$$

$c_1, \ldots, c_n$ étant n nouvelles inconnues, que nous pourrons lier par $n-1$ relations à notre choix. Nous prendrons les $(n-1)$

relations suivantes

$$(C)\quad \begin{cases} c'_1 y_1 + c'_2 y_2 + \ldots + c'_n y_n = 0 \quad \text{ou} \quad \sum c'_i y_i = 0, \\ \sum c'_i y'_i = 0, \\ \sum c'_i y''_i = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sum c'_i y_i^{(n-2)} = 0. \end{cases}$$

Il en résulte que les $(n-1)$ premières dérivées de y sont les mêmes que si $c_1, \ldots, c_n$ étaient des constantes; c'est-à-dire que

$$y' = \sum c_i y'_i,$$

$$y'' = \sum c_i y''_i,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y^{(n-1)} = \sum c_i y_i^{(n-1)},$$

d'où

$$y^{(n)} = \sum c_i y_i^{(n)} + \sum c'_i y_i^{(n-1)}.$$

Portons ces valeurs dans l'équation à second membre; les termes en $c_1, \ldots, c_n$ disparaissent (n° 343), et il reste seulement

$$\sum c'_i y_i^{(n-1)} = V.$$

Cette équation et les $(n-1)$ relations (C) donnent $c'_1, c'_2, \ldots, c'_n$ en fonction de x, par n équations du premier ordre. Ces équations sont compatibles, car le déterminant des coefficients des inconnues est le déterminant Δ, qui, égalé à zéro, exprimerait que $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sont liées par une relation linéaire : comme on a supposé ces fonctions linéairement indépendantes, Δ n'est pas nul.

On peut donc résoudre les équations considérées par rapport à $c'_1, c'_2, \ldots, c'_n$: on a ainsi

$$c'_1 = U_1, \qquad c'_2 = U_2, \qquad \ldots, \qquad c'_n = U_n,$$

U_i, ... étant des fonctions de x; d'où, *par n quadratures*,

$$c_i = \int U_i\,dx + \lambda_i,$$

λ_i étant une constante arbitraire. Si, enfin, l'on porte ces valeurs dans l'expression de y, il vient

$$y = \sum c_i y_i = \sum \left(y_i \int U_i\,dx\right) + \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \ldots + \lambda_n y_n.$$

Telle sera la solution générale de l'équation avec second membre, déduite, par n quadratures, de l'intégrale générale de l'équation sans second membre. C. Q. F. D.

348. Exemple. — Reprenons l'équation du premier ordre (n° **253**)

$$(8) \qquad \frac{dy}{dx} + Py + Q = 0.$$

L'équation sans second membre, $\frac{dy}{dx} + Py = 0$, s'intégre de suite par séparation des variables; sa solution est

$$y = ce^{-\int P\,dx}.$$

Portons cette valeur dans (8), en regardant c comme une fonction de x: les termes en c disparaissent; il reste

$$e^{-\int P\,dx}\frac{dc}{dx} + Q = 0,$$

d'où

$$c = -\int Q e^{\int P\,dx}\,dx + c_1,$$

ce qui donne, pour la solution générale de (8),

$$y = c_1 e^{-\int P\,dx} - e^{-\int P\,dx}\int Q e^{\int P\,dx}\,dx.$$

C'est au fond la méthode du n° **253**; les notations diffèrent, mais les calculs sont identiques: c est la fonction désignée au n° **253** par u; $e^{-\int P\,dx}$ est v.

349. Remarque. — Soient deux équations linéaires ayant même premier membre :

$$\frac{d^n y}{dx^n} + \ldots + Uy = V_1, \tag{9}$$

$$\frac{d^n y}{dx^n} + \ldots + Uy = V_2; \tag{10}$$

si Y_1 est une solution de la première et Y_2 une solution de la seconde, $Y_1 + Y_2$ sera la solution de la même équation, où le second membre serait $V_1 + V_2$:

$$\frac{d^n y}{dx^n} + \ldots + Uy = V_1 + V_2.$$

Il suffit, pour le voir, d'ajouter les relations qui expriment que Y_1 et Y_2 vérifient respectivement (9) et (10).

Cette remarque est souvent utile lorsqu'on cherche une solution particulière d'une équation linéaire à second membre.

II. — ÉQUATIONS LINÉAIRES PARTICULIÈRES.

1° *Équations à coefficients constants sans second membre.*

350. On sait les intégrer complètement; elles sont de la forme

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + f\frac{dy}{dx} + gy = 0; \tag{1}$$

$a, \ldots, f, g$ désignant des constantes. Posons en effet avec Euler

$$y = e^{sx},$$

s étant une constante, que nous chercherons à déterminer de manière que y satisfasse à l'équation (1). Nous avons

$$\frac{dy}{dx} = se^{sx}, \quad \ldots, \quad \frac{d^n y}{dx^n} = s^n e^{sx}.$$

Substituons dans le premier membre de (1) ; le résultat est

$$e^{sx}(s^n + as^{n-1} + \ldots + fs + g),$$

et cette quantité sera nulle si s est racine de l'équation, dite *caractéristique*,

$$(2) \qquad s^n + as^{n-1} + \ldots + fs + g = 0.$$

Si cette équation a ses n racines distinctes, $s_1, s_2, \ldots, s_n$, on aura ainsi n solutions particulières de (1) : $e^{s_1 x}, \ldots, e^{s_n x}$. Je dis qu'il n'existe aucune relation linéaire et homogène entre ces solutions, c'est-à-dire (n° 341) que le déterminant Δ

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^{s_1 x} & e^{s_2 x} & \ldots & e^{s_n x} \\ s_1 e^{s_1 x} & s_2 e^{s_2 x} & \ldots & s_n e^{s_n x} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ s_1^{n-1} e^{s_1 x} & s_2^{n-1} e^{s_2 x} & \ldots & s_n^{n-1} e^{s_n x} \end{vmatrix}$$

n'est pas nul. Si l'on divise en effet les termes de la première colonne par $e^{s_1 x}, \ldots$, ceux de la dernière par $e^{s_n x}$, ce déterminant se réduit à celui de Vandermonde, pour les éléments $s_1, s_2, \ldots, s_n$; il n'est dès lors jamais nul si ces n quantités sont différentes, ce qui est précisément l'hypothèse.

Il en résulte (n° 342) que l'intégrale générale de la proposée (1) est donnée par la formule

$$y = c_1 e^{s_1 x} + c_2 e^{s_2 x} + \ldots + c_n e^{s_n x},$$

$c_1, c_2, \ldots, c_n$ étant des constantes arbitraires.

351. Reste à examiner le cas où l'équation caractéristique (2) aurait des racines égales : voici la méthode proposée par d'Alembert.

Supposons qu'il y ait une racine double, s_1 : faisons varier infiniment peu les coefficients $a, \ldots, f, g$, de manière que l'équation caractéristique n'ait plus de racine double ; elle aura alors deux racines, s' et s'', voisines l'une de l'autre et de s_1, auxquelles correspondent, pour l'équation différentielle, les solutions

$$e^{s'x}, \quad e^{s''x},$$

qu'on peut remplacer par

$$e^{s'x}, \quad \frac{e^{s''x} - e^{s'x}}{s'' - s'},$$

dont la dernière est une combinaison linéaire et homogène des

deux premières. Si l'on fait tendre s'' vers s', cette seconde solution tend vers la dérivée

$$\frac{d}{ds}e^{sx},$$

pour $s = s'$; c'est-à-dire vers $xe^{s_1 x}$, puisque $\lim s' = s_1$.

En d'autres termes, si l'on désigne par c_1 et c_2 deux constantes arbitraires, l'équation différentielle proposée est vérifiée par la fonction

$$e^{s_1 x}(c_1 + c_2 x).$$

Tel est le terme qui, dans l'intégrale générale, correspond à la racine double, s_1; il renferme deux constantes arbitraires, et, par suite, l'intégrale générale de (1), si l'équation caractéristique n'a pas d'autre racine multiple, est

$$y = (c_1 + c_2 x)e^{s_1 x} + c_3 e^{s_3 x} + \ldots + c_n e^{s_n x}.$$

On traiterait d'une manière analogue le cas de la racine triple, et ainsi de suite, et l'on verrait que les termes de l'intégrale générale qui correspondent à une racine multiple s_1, d'ordre k, sont les k termes

$$(c_1 + c_2 x + \ldots + c_k x^{k-1})e^{s_1 x};$$

mais, ce résultat une fois prévu, il vaut mieux l'établir directement.

352. Remplaçons à cet effet y par e^{sx} dans le premier membre de l'équation (1), et posons

$$\varphi(s) = s^n + as^{n-1} + \ldots + fs + g;$$

il vient *identiquement :*

$$(3)\quad \frac{d^n}{dx^n}(e^{sx}) + a\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(e^{sx}) + \ldots + f\frac{d}{dx}(e^{sx}) + ge^{sx} = e^{sx}\varphi(s).$$

Dérivons les deux membres par rapport à s, en intervertissant l'ordre des dérivations dans les termes du premier membre; nous aurons

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^n}{dx^n}(xe^{sx}) + a\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(xe^{sx}) + \ldots \\ &\qquad + f\frac{d}{dx}(xe^{sx}) + g(xe^{sx}) = e^{sx}[\varphi'(s) + x\varphi(s)]. \end{aligned}\right.$$

Dérivons encore une fois par rapport à s :

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{d^n}{dx^n}(x^2 e^{sx}) + \ldots + f\dfrac{d}{dx}(x^2 e^{sx}) + g(x^2 e^{sx}) \\ \quad = e^{sx}[\varphi''(s) + 2x\varphi'(s) + x^2\varphi(s)], \end{cases}$$

et ainsi de suite.

L'équation (3) montre qu'on satisfait à l'équation proposée (1), en posant $y = e^{s_1 x}$, s_1 étant une racine de $\varphi(s) = 0$.

Si s_1 est racine double, $\varphi'(s_1)$ est nul, et la relation (4) montre qu'on a une solution de (1) en prenant $y = xe^{s_1 x}$; ce qui, avec $e^{s_1 x}$, fait deux solutions correspondant à la racine s_1.

Si s_1 est racine triple, $\varphi''(s_1)$ est nul, et la relation (5) montre que, indépendamment des deux solutions précédentes, on a la solution $y = x^2 e^{s_1 x}$, et ainsi de suite.

Donc, à chaque racine, s_1, de l'équation caractéristique (2), correspond ainsi un nombre de solutions particulières $e^{s_1 x}$, $xe^{s_1 x}$, $x^2 e^{s_1 x}$, ..., égal à son degré de multiplicité : l'équation (2) étant de degré n, on a par là n solutions, qui, multipliées par des constantes et additionnées, fournissent l'intégrale générale de la proposée (1). Voici dès lors le résultat final :

Si s_1, s_2, ... sont les racines de l'équation caractéristique (2), *et k_1, k_2, ... leurs ordres respectifs de multiplicité, l'intégrale générale de la proposée* (1) *sera*

$$y = e^{s_1 x}P_{k_1-1}(x) + e^{s_2 x}P_{k_2-1}(x) + \ldots,$$

$P_{k_1-1}(x)$, ... *étant des polynomes en x d'ordres $k_1 - 1$, $k_2 - 1$, ... dont les coefficients sont tous absolument arbitraires.*

353. **Remarque.** — Si l'équation caractéristique a des racines imaginaires, cette formule introduit des exponentielles imaginaires qu'on peut faire disparaître comme il suit.

Les coefficients de l'équation proposée (1) étant supposés réels, les racines imaginaires de l'équation caractéristique sont deux à deux conjuguées. Soient donc

$$s_1 = \alpha + \beta i,$$
$$s_2 = \alpha - \beta i,$$

deux racines conjuguées, multiples d'ordre k. Les termes corres-

pondants de l'intégrale générale sont

$$P_{k-1}(x)\, e^{(\alpha+\beta i)x} + P'_{k-1}(x)\, e^{(\alpha-\beta i)x};$$

ce qu'on écrit, en remplaçant $e^{i\beta x}$ et $e^{-i\beta x}$ par leurs valeurs en fonction de $\cos\beta x$ et $\sin\beta x$,

$$e^{\alpha x}\cos\beta x(P_{k-1} + P'_{k-1}) + e^{\alpha x}\sin\beta x(iP_{k-1} - iP'_{k-1}),$$

ou

$$e^{\alpha x}\cos\beta x\, Q_{k-1}(x) + e^{\alpha x}\sin\beta x\, Q'_{k-1}(x),$$

Q et Q' étant des polynomes en x, d'ordre $k-1$, et qui sont arbitraires, puisque P_{k-1} et P'_{k-1} le sont. On a ainsi une expression réelle.

354. **Exemples.** — 1° Soit l'équation

$$\frac{d^4y}{dx^4} - y = 0;$$

l'équation caractéristique, $s^4 - 1 = 0$, a pour racines ± 1 et $\pm i$; donc l'intégrale générale est

$$c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x.$$

2° Soit l'équation

$$\frac{d^4y}{dx^4} + 8\frac{d^2y}{dx^2} + 16y = 0;$$

l'équation caractéristique, $s^4 + 8s^2 + 16 = 0$ ou $(s^2+4)^2 = 0$, a pour racines doubles $\pm 2i$; donc l'intégrale générale est

$$(c_1 x + c_2)\cos 2x + (c'_1 x + c'_2)\sin 2x.$$

2° *Équations linéaires à coefficients constants avec second membre.*

355. Soit à intégrer l'équation

$$(6)\qquad \frac{d^ny}{dx^n} + a\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + f\frac{dy}{dx} + gy = V,$$

où $a, b, \ldots, f, g$ sont des constantes, et le second membre, V, une fonction de x.

On intégrera d'abord l'équation sans second membre, et l'on en déduira l'intégrale de l'équation avec second membre par le procédé général du n° 347 (méthode de la variation des constantes); on aura ainsi n quadratures à effectuer.

Cette méthode convient quel que soit V; elle est même généralement la seule applicable : toutefois, si V est d'une forme particulière, qui va être indiquée plus bas, on pourra trouver une solution *particulière* de l'équation proposée, et, en lui ajoutant la solution générale de l'équation sans second membre, on aura (n° 345) l'intégrale générale de (6).

356. Supposons que V soit de la forme

$$V = f(x, e^{\alpha x}, e^{\beta x}, \ldots, \cos\gamma x, \sin\gamma x, \cos\delta x, \sin\delta x, \ldots),$$

f étant un polynome entier par rapport à tous les termes entre parenthèses, et α, β, ..., γ, δ, ... des constantes. On pourra d'abord remplacer les sinus et cosinus par leurs expressions en exponentielles, et, comme le produit de plusieurs exponentielles $e^{\alpha x}$ est une exponentielle de même forme, V pourra se mettre sous la forme d'une somme de termes : $\Sigma P e^{\alpha x}$, P étant un polynome entier en x. La question est alors réduite à trouver une intégrale *particulière* de l'équation

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + f\frac{dy}{dx} + gy = Pe^{\alpha x}, \tag{7}$$

car, si l'on détermine ainsi des intégrales particulières correspondant aux différents termes de V, leur somme sera une intégrale particulière de la proposée, comme on l'a observé au n° 349.

1° Supposons d'abord qu'il n'y ait pas d'exponentielle au second membre de (7), c'est-à-dire $\alpha = 0$; l'équation (7) devient

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + f\frac{dy}{dx} + gy = P_m(x), \tag{8}$$

P_m étant un polynome d'ordre m en x :

$$P_m = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_m.$$

On voit de suite que l'équation (8) admet pour solution *parti-*

culière un polynome en x, $Q_m(x)$, d'ordre m. Car soit posé

$$Q_m = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m,$$

on aura, en remplaçant y par Q_m, dans (8), et égalant les coefficients des mêmes puissances de x dans les deux membres,

$$\begin{aligned} a_0 g &= A_0, \\ a_1 g + \quad mfa_0 &= A_1, \\ \ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots, \\ a_m g + mfa_{m-1} + \ldots &= A_m, \end{aligned}$$

équations qui donnent successivement a_0, a_1, ..., a_m sans ambiguïté, pourvu toutefois que g ne soit pas nul, c'est-à-dire qu'il y ait un terme en y dans l'équation (8).

Si g est nul, et si, en même temps, les coefficients de $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, ..., $\frac{d^{k-1}y}{dx^{k-1}}$ sont nuls, l'équation (8) est de la forme

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + h\frac{d^k y}{dx^k} = P_m(x);$$

c'est une équation linéaire, à coefficients constants, par rapport à $\frac{d^k y}{dx^k}$; d'après ce qui précède elle admet donc comme solution particulière un polynome $Q'_m(x)$ d'ordre m,

$$\frac{d^k y}{dx^k} = Q'_m(x),$$

d'où l'on tire pour y, par k quadratures consécutives, et sans introduire de constantes arbitraires, la solution *particulière*

$$y = x^k Q_m(x),$$

où Q_m désigne un polynome déterminé d'ordre m.

2° Reprenons maintenant l'équation (7) sous la forme générale

$$(7) \qquad \frac{d^n y}{dx^n} + a\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + gy = e^{\alpha x} P_m(x);$$

pour en trouver une solution particulière, nous ramènerons ce cas au précédent en posant

$$y = z e^{\alpha x},$$

z étant l'inconnue nouvelle. Il vient, par la formule de Leibniz,

$$\frac{d^n y}{dx^n} = e^{\alpha x}\left[\alpha^n z + n\alpha^{n-1}\frac{dz}{dx} + \frac{n(n-1)}{1.2}\alpha^{n-2}\frac{d^2 z}{dx^2} + \ldots + n\alpha\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}} + \frac{d^n z}{dx^n}\right],$$

....

Portons ces valeurs dans (7); nous avons, en supprimant aux deux membres le facteur $e^{\alpha x}$, et en commençant par les termes en z, $\frac{dz}{dx}$, ...,

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} & z\varphi(\alpha) + \frac{dz}{dx}\varphi'(\alpha) + \frac{1}{1.2}\frac{d^2 z}{dx^2}\varphi''(\alpha) + \ldots \\ & \quad + \frac{1}{1.2\ldots k}\frac{d^k z}{dx^k}\varphi^{(k)}(\alpha) + \ldots + \frac{d^n z}{dx^n} = P_m(x), \end{aligned}\right.$$

$\varphi(\alpha)$ désignant, comme plus haut, le premier membre de l'équation caractéristique, à savoir $\alpha^n + a\alpha^{n-1} + \ldots + f\alpha + g$. C'est là, en z, une équation de la forme (8).

Donc, si $\varphi(\alpha)$ n'est pas nul, c'est-à-dire si α n'est pas racine de l'équation caractéristique, la transformée (9) admettra, comme solution particulière, un polynome $Q_m(x)$, d'ordre m; si l'on a

$$\varphi(\alpha) = \varphi'(\alpha) = \ldots = \varphi^{(k-1)}(\alpha) = 0,$$

c'est-à-dire si α est racine multiple d'ordre k de l'équation caractéristique, la transformée (9) admettra, comme solution particulière, un polynome de la forme $x^k Q_m(x)$, Q_m étant d'ordre m : d'où résulte, pour l'équation en y, la solution $e^{\alpha x} x^k Q_m(x)$.

357. En résumé :

On aura dans tous les cas une solution particulière de l'équation

$$(7)\quad \frac{d^n y}{dx^n} + a\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + f\frac{dy}{dx} + gy = P_m(x)e^{\alpha x},$$

où a, ..., f, g et α sont des constantes, en posant

$$y = e^{\alpha x} x^k Q_m(x),$$

$Q_m(x)$ étant un polynome en x, de même degré que le polynome $P_m(x)$, et k étant l'ordre de multiplicité de la racine α dans l'équation caractéristique. Si α n'est pas racine de cette équation, on fera $k = 0$.

Les coefficients du polynome $Q_m(x)$ se détermineront par substitution de la valeur de y dans l'équation (7); ajoutant à cette solution particulière la solution générale de l'équation sans second membre, on aura l'intégrale générale.

358. Exemple. — Soit l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = \cos x.$$

Le second membre étant la somme de deux exponentielles de la forme e^{ix}, e^{-ix}, et l'équation caractéristique admettant pour racines $\pm i$, une solution *particulière* sera de la forme

$$x(\lambda e^{ix} + \mu e^{ix}),$$

λ et μ étant des constantes, ou encore, de la forme

$$x(\alpha \cos x + \beta \sin x),$$

α et β étant des constantes à déterminer. Substituant à y cette valeur dans l'équation proposée, il reste

$$-2\alpha \sin x + 2\beta \cos x = \cos x,$$

d'où

$$\alpha = 0, \qquad \beta = \frac{1}{2};$$

la solution particulière est donc $\frac{1}{2} x \sin x$, et l'intégrale générale est

$$y = \frac{1}{2} x \sin x + C_1 \sin x + C_2 \cos x.$$

3° *Équations d'Euler qui se ramènent aux équations linéaires à coefficients constants.*

359. Ce sont celles du type

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} & (px+q)^n \frac{d^n y}{dx^n} \\ & + a(px+q)^{n-1} \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + f(px+q)\frac{dy}{dx} + gy = 0, \end{aligned} \right.$$

p, q, a, ..., f, g étant des constantes.

Posons d'abord

$$x + \frac{q}{p} = \xi,$$

l'équation devient

$$(11)\qquad p^n\xi^n\frac{d^n y}{d\xi^n}+p^{n-1}a\xi^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{d\xi^{n-1}}+\ldots+pf\xi\frac{dy}{d\xi}+gy=0.$$

Si l'on pose maintenant

$$(12)\qquad \xi=e^t,\qquad \text{d'où}\qquad \frac{dt}{d\xi}=e^{-t},$$

t étant la nouvelle variable, il viendra

$$\frac{dy}{d\xi}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{d\xi}=e^{-t}\frac{dy}{dt},$$

$$\frac{d^2y}{d\xi^2}=\frac{d}{d\xi}\left(e^{-t}\frac{dy}{dt}\right)=\frac{dt}{d\xi}\frac{d}{dt}\left(e^{-t}\frac{dy}{dt}\right)=e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right),$$

et l'on aura évidemment, d'une manière générale,

$$\frac{d^n y}{d\xi^n}=e^{-nt}\left(\frac{d^n y}{dt^n}+\lambda\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\ldots+\mu\frac{dy}{dt}\right),$$

λ, ..., μ étant des constantes. Portant ces valeurs, et la valeur (12) de ξ, dans l'équation (11), on voit que les exponentielles disparaissent, car e^{nt} provenant de ξ^n détruit e^{-nt} provenant de $\frac{d^n y}{d\xi^n}$; il reste alors une équation linéaire et homogène à coefficients constants, en y, $\frac{dy}{dt}$, ..., $\frac{d^n y}{dt^n}$, que l'on sait intégrer. *Désignons cette équation par* (E).

Ce résultat une fois établi, il sera inutile pour intégrer l'équation (10) ou l'équation (11), qui lui est équivalente, de passer par l'intermédiaire de la substitution (12). En effet, on a n solutions indépendantes de l'équation (E) par les expressions

$$e^{s_1 t},\qquad e^{s_2 t},\qquad \ldots,\qquad e^{s_n t};$$

s_1, ..., s_n étant les racines supposées inégales de l'équation caractéristique correspondante. L'équation (11) admet donc les n solutions indépendantes

$$\xi^{s_1},\qquad \xi^{s_2},\qquad \ldots,\qquad \xi^{s_n};$$

et il est aisé de déterminer directement s_1, ..., s_n. Écrivons, pour cela, que ξ^s est une solution de (11); nous avons, en divisant par ξ^s,

$$(13)\qquad \begin{cases} p^n s(s-1)\ldots(s-n+1) \\ +\,ap^{n-1}s(s-1)\ldots(s-n+2)+\ldots+fps+g=0, \end{cases}$$

équation qui donne, pour s, n valeurs, qui sont $s_1, s_2, \ldots, s_n$. L'équation (13) est donc identique à l'équation caractéristique de l'équation (E).

Si l'équation caractéristique de (E) a une racine multiple s_1, d'ordre k, (E) admet comme solution

$$y = e^{s_1 t} P_{k-1}(t);$$

P_{k-1} désignant un polynome à coefficients arbitraires; donc l'équation (11) aura la solution correspondante

$$y = \xi^{s_1} P_{k-1}(\log \xi).$$

Ainsi, pour intégrer l'équation (11), on formera l'équation (13); soient $s_1, s_2, \ldots$ ses racines, supposées d'ordres $k_1, k_2, \ldots$ de multiplicité : l'intégrale générale de (11) sera donnée par

$$y = \xi^{s_1} P_{k_1-1}(\log \xi) + \xi^{s_2} P_{k_2-1}(\log \xi) + \ldots,$$

les P étant des polynomes en $\log \xi$, d'ordre égal à l'indice, et de coefficients tous arbitraires.

Par suite enfin, l'intégrale générale de la proposée (10) sera évidemment

$$y = (px+q)^{s_1} P_{k_1-1}[\log(px+q)] + \ldots.$$

Exemple. — Pour l'équation du type (10),

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + y = 0,$$

l'équation (13) est $s(s-1) - s + 1 = 0$, et admet la racine double 1. L'intégrale générale de la proposée est donc

$$y = x(c_1 \log x + c_2),$$

c_1 et c_2 étant des constantes arbitraires.

III. — SYSTÈMES LINÉAIRES.

360. Les systèmes linéaires canoniques (n° 326) jouissent de propriétés analogues à celles des équations linéaires à une seule inconnue.

Leur type général est, si l'on désigne par y, z, t, u, ... les inconnues,

$$(S_0)\quad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} + P_1 y + Q_1 z + R_1 t + S_1 u + \ldots = V_1, \\ \dfrac{dz}{dx} + P_2 y + Q_2 z + R_2 t + S_2 u + \ldots = V_2, \\ \dfrac{dt}{dx} - P_3 y + Q_3 z + R_3 t + S_3 u + \ldots = V_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

le nombre des équations est égal à celui des inconnues, et les P, Q, R, ..., V sont des fonctions de x seul.

Si V_1, V_2, ... sont tous nuls, le système est dit *sans seconds membres*.

L'intégration du système (S_0), d'ordre n, c'est-à-dire à n inconnues, peut se ramener à celle d'une seule équation différentielle linéaire d'ordre n.

Dérivons en effet $(n-1)$ fois chacune des équations (S_0) : nous obtenons en tout $n + n(n-1)$, ou n^2, équations linéaires en $y, \dfrac{dy}{dx}, \ldots, \dfrac{d^n y}{dx^n}$; $z, \dfrac{dz}{dx}, \ldots, \dfrac{d^n z}{dx^n}$; ..., entre lesquelles nous pouvons éliminer les inconnues $z, \dfrac{dz}{dx}, \ldots, \dfrac{d^n z}{dx^n}$; $t, \dfrac{dt}{dx}, \ldots$, qui sont au nombre de $(n+1)(n-1)$, ou n^2-1. On arrive ainsi à une équation *linéaire* en y, qui est généralement d'ordre n. Celle-ci intégrée, les équations précédentes, en général, donnent linéairement les autres inconnues z, t, ... (et leurs dérivées), en fonction de y et de ses dérivées.

Cette marche est avantageuse si le nombre des inconnues est peu élevé; dans les autres cas, il vaut mieux essayer d'intégrer directement le système. On va indiquer, dans ce but, les propriétés les plus importantes des systèmes linéaires et de leurs solutions.

Systèmes linéaires sans seconds membres.

361. Considérons le système (S_0) *sans seconds membres,* c'est-à-dire où tous les V sont nuls : il est clair que si y_1, z_1, t_1, ... forment un système de solutions, ce que l'on appellera plus brièvement une solution, $c_1 y_1$, $c_1 z_1$, $c_1 t_1$, ... sera une autre

solution. De même, $y_2, z_2, t_2, \ldots$ étant une solution, $c_1 y_1 + c_2 y_2$, $c_1 z_1 + c_2 z_2$, $c_1 t_1 + c_2 t_2$, ... en sera une autre.

Si l'on a p solutions $(p \leqq n)$: $y_1, z_1, t_1, \ldots; y_p, z_p, t_p, \ldots$; on dira qu'elles sont *indépendantes* si l'on ne peut trouver un système de constantes, $c_1, c_2, \ldots, c_p$, simultanément différentes de zéro, telles qu'on ait, quel que soit x,

$$\begin{aligned} c_p y_p &= c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_{p-1} y_{p-1}, \\ c_p z_p &= c_1 z_1 + c_2 z_2 + \ldots + c_{p-1} z_{p-1}, \\ c_p t_p &= c_1 t_1 + c_2 t_2 + \ldots + c_{p-1} t_{p-1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Il faut et il suffit pour cela que l'un au moins des déterminants d'ordre p formés avec p colonnes du tableau

$$(1) \qquad \left\{ \begin{matrix} y_1, & z_1, & t_1, & \ldots, \\ y_2, & z_2, & t_2, & \ldots, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ y_p, & z_p, & t_p, & \ldots, \end{matrix} \right.$$

soit différent de zéro.

362. Théorème. — *Si l'on connaît p solutions indépendantes d'un système d'ordre n sans seconds membres, l'intégration de celui-ci se ramène à l'intégration d'un système sans seconds membres d'ordre n — p, et à p quadratures.*

Soit, pour fixer les idées, $n = 5$ et $p = 2$. Le système est alors

$$(S) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{dy}{dx} + P_1 y + Q_1 z + R_1 t + S_1 u + T_1 v &= 0, \\ \frac{dz}{dx} + P_2 y + Q_2 z + R_2 t + S_2 u + T_2 v &= 0, \\ \frac{dt}{dx} + P_3 y + Q_3 z + R_3 t + S_3 u + T_3 v &= 0, \\ \frac{du}{dx} + P_4 y + Q_4 z + R_4 t + S_4 u + T_4 v &= 0, \\ \frac{dv}{dx} + P_5 y + Q_5 z + R_5 t + S_5 u + T_5 v &= 0. \end{aligned} \right.$$

On connaît les deux solutions

$$\begin{matrix} y_1, & z_1, & t_1, & u_1, & v_1, \\ y_2, & z_2, & t_2, & u_2, & v_2. \end{matrix}$$

Si elles sont indépendantes, un au moins des déterminants formés avec deux colonnes de ce tableau n'est pas nul ; soit $y_1 z_2 - z_1 y_2 \gtrless 0$. Posons alors

$$(2)\quad \begin{cases} y = Y y_1 + Z y_2, \\ z = Y z_1 + Z z_2, \\ t = Y t_1 + Z t_2 + \theta, \\ u = Y u_1 + Z u_2 + \upsilon, \\ v = Y v_1 + Z v_2 + \eta, \end{cases}$$

Y, Z, θ, υ, η étant les nouvelles inconnues. Si l'on substitue ces valeurs de y, z, t, u, v, dans le système proposé (S), on obtient cinq équations linéaires et homogènes par rapport à Y, Z, θ, υ, η et à leurs dérivées ; dans ces équations les termes en Y et Z disparaissent, car le système est vérifié si l'on suppose Y et Z constants et θ, υ, η nuls ; il reste donc

$$(3)\quad \begin{cases} y_1 \dfrac{dY}{dx} + y_2 \dfrac{dZ}{dx} + R_1\theta + S_1\upsilon + T_1\eta = 0, \\ z_1 \dfrac{dY}{dx} + z_2 \dfrac{dZ}{dx} + R_2\theta + S_2\upsilon + T_2\eta = 0, \\ \dfrac{d\theta}{dx} + t_1 \dfrac{dY}{dx} + t_2 \dfrac{dZ}{dx} + R_3\theta + S_3\upsilon + T_3\eta = 0, \\ \dfrac{d\upsilon}{dx} + u_1 \dfrac{dY}{dx} + u_2 \dfrac{dZ}{dx} + R_4\theta + S_4\theta + T_4\eta = 0. \\ \dfrac{d\eta}{dx} + v_1 \dfrac{dY}{dx} + v_2 \dfrac{dZ}{dx} + R_5\theta + S_5\upsilon + T_5\eta = 0. \end{cases}$$

Des deux premières on peut tirer (puisque $y_1 z_2 - z_2 y_1 \lesseqgtr 0$) $\dfrac{dY}{dx}$ et $\dfrac{dZ}{dx}$ en fonction linéaire et homogène de θ, υ, η ; portant ces valeurs dans les équations suivantes, on obtient un système linéaire, sans second membre, aux *trois* inconnues θ, υ, η, et de la forme

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{d\theta}{dx} + U_1\theta + V_1\upsilon + W_1\eta = 0, \\ \dfrac{d\upsilon}{dx} + U_2\theta + V_2\upsilon + W_2\eta = 0, \\ \dfrac{d\eta}{dx} + U_3\theta + V_3\upsilon + W_3\eta = 0. \end{cases}$$

Ce système intégré, les deux premières relations (3) donneront

$\frac{dY}{dx}$ et $\frac{dZ}{dx}$; d'où Y et Z par *deux quadratures*. Enfin les équations (2) fourniront explicitement les anciennes inconnues.

C. Q. F. D.

363. Corollaire. — Soit θ, υ, η une solution *particulière* de (4); les valeurs correspondantes de Y et de Z étant déterminées par deux quadratures à l'aide des deux premières relations (3), les formules (2) fournissent une *nouvelle* solution du système considéré : cette solution et les deux solutions primitives y_1, z_1, t_1, u_1, v_1; y_2, z_2, t_2, u_2, v_2 sont indépendantes; car si θ, par exemple, est $\gtrless 0$, le déterminant

$$\begin{vmatrix} y_1 & z_1 & t_1 \\ y_2 & z_2 & t_2 \\ Yy_1+Zy_2 & Yz_1+Zz_2 & Yt_1+Zt_2+\theta \end{vmatrix}, \quad \text{ou} \quad \theta \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix},$$

n'est pas nul. Ainsi, à p solutions indépendantes on peut en ajouter une nouvelle, formant avec elles un système de $p+1$ solutions indépendantes.

Or une solution $y_1, z_1, t_1, \ldots$, forme à elle seule un système indépendant, car $y_1, z_1, t_1, \ldots$ ne sont pas nuls à la fois : donc, en allant de proche en proche, on voit qu'il *existe un système de n solutions indépendantes, n étant l'ordre du système proposé.*

364. Soit donc un système *quelconque* de n solutions *indépendantes* $(y, z_1, t_1, \ldots), \ldots, (y_n, z_n, t_n, \ldots)$; pour obtenir la solution générale, posons dans le système proposé (S)

$$(5)\qquad \begin{cases} y = c_1y_1 + c_2y_2 + \ldots + c_ny_n, \\ z = c_1z_1 + c_2z_2 + \ldots + c_nz_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

$c_1, c_2, \ldots, c_n$ étant les n inconnues nouvelles. Le système transformé ne contiendra pas de termes en $c_1, c_2, \ldots, c_n$ (n° 362) puisque, si $c_1, \ldots, c_n$ sont constants, les équations (5) donnent une solution du système. Il restera ainsi

$$y_1\frac{dc_1}{dx} + y_2\frac{dc_2}{dx} + \ldots + y_n\frac{dc_n}{dx} = 0,$$
$$z_1\frac{dc_1}{dx} + \ldots\ldots\ldots + z_n\frac{dc_n}{dx} = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

d'où, puisque le déterminant $\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ z_1 & z_2 & \dots & z_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$ est supposé $\gtrless 0$,

$$\frac{dc_1}{dx} = \frac{dc_2}{dx} = \dots = \frac{dc_n}{dx} = 0,$$

c'est-à-dire

$$c_1 = \text{const.}, \qquad c_2 = \text{const.}, \qquad \dots.$$

Donc :

365. Théorème. — *La solution la plus générale d'un système linéaire sans seconds membres est fournie par les formules* (5), *où* $c_1, c_2, \dots, c_n$ *désignent des constantes arbitraires, et* $(y_1, z_1, t_1, \dots), \dots, (y_n, z_n, t_n, \dots)$, *n solutions particulières indépendantes, quelconques d'ailleurs.*

Systèmes linéaires à seconds membres.

366. Soit par exemple le système d'ordre trois

$$(S_1) \qquad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} + P_1 y + Q_1 z + R_1 t = V_1, \\ \dfrac{dz}{dx} + P_2 y + \dots\dots\dots\dots = V_2, \\ \dfrac{dt}{dx} + P_3 y + \dots\dots\dots\dots = V_3. \end{cases}$$

Si l'on en connaît une solution particulière Y_0, Z_0, T_0, on le ramènera à un système sans seconds membres en posant

$$y = Y + Y_0, \qquad z = Z + Z_0, \qquad t = T + T_0,$$

ce qui donne, en tenant compte de ce que Y_0, Z_0, T_0 est une solution,

$$\begin{aligned} &\frac{dY}{dx} + P_1 Y + Q_1 Z + R_1 T = 0, \\ &\frac{dZ}{dx} + P_2 Y + \dots\dots\dots\dots = 0, \\ &\frac{dT}{dx} + P_3 Y + \dots\dots\dots\dots = 0. \end{aligned}$$

C'est le système (S_1), sans seconds membres. L'intégrale générale du système à seconds membres est donc de la forme

$$(6) \qquad \begin{cases} y = Y_0 + c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3, \\ z = Z_0 + c_1 z_1 + c_2 z_2 + c_3 z_3, \\ t = T_0 + c_1 t_1 + c_2 t_2 + c_3 t_3, \end{cases}$$

$y_1, z_1, t_1, \ldots; y_3, z_3, t_3$, étant trois solutions, indépendantes entre elles, du système sans seconds membres.

On établit comme au n° 362 que :

367. Théorème. — *Si l'on connaît p solutions indépendantes du système sans seconds membres, l'intégration du système à seconds membres se ramène à l'intégration d'un système à seconds membres d'ordre $n-p$, et à p quadratures.*

Les raisonnements et les calculs sont exactement ceux du n° 362. En particulier :

368. Corollaire. — *Si l'on connaît l'intégrale générale du système sans seconds membres, on saura intégrer le système avec seconds membres, à l'aide de n quadratures.*

On posera pour cela, dans le système d'ordre n, à inconnues $y, z, \ldots,$

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n,$$
$$z = c_1 z_1 + c_2 z_2 + \ldots + c_n z_n,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$y_1, z_1, \ldots; \ldots; y_n, z_n, \ldots$ étant les n solutions connues du système sans seconds membres, et $c_1, c_2, \ldots, c_n$ étant les n inconnues nouvelles ; le système à seconds membres se réduira alors à

$$y_1 \frac{dc_1}{dx} + \ldots + y_n \frac{dc_n}{dx} = V_1,$$
$$z_1 \frac{dc_1}{dx} + \ldots + z_n \frac{dc_n}{dx} = V_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

on en tirera $\frac{dc_1}{dx_1}, \ldots, \frac{dc_n}{dx}$; et l'on aura ensuite $c_1, c_2, \ldots, c_n$ par n quadratures.

Systèmes linéaires à coefficients constants, sans seconds membres.

369. Ils sont de la forme ($n = 3$, par exemple) :

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{dy}{dx} + p_1 y + q_1 z + r_1 t = 0,\\ &\frac{dz}{dx} + p_2 y + q_2 z + r_2 t = 0,\\ &\frac{dt}{dx} + p_3 y + q_3 z + r_3 t = 0,\end{aligned}\right.$$

les p, q, r étant des constantes. On sait les intégrer, ce qui est évident *a priori*, puisqu'on pourrait, par dérivations et éliminations, réduire le système à une équation différentielle ordinaire (n° 360) dont les coefficients seraient constants.

Pour faire directement l'intégration, cherchons des solutions particulières de la forme

$$y = \lambda e^{sx}, \qquad z = \mu e^{sx}, \qquad t = \nu e^{sx},$$

λ, μ, ν, s étant des constantes. Substituant dans (7) et divisant par e^{sx}, on trouve

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} &\lambda(s+p_1) + \mu q_1 + \nu r_1 = 0,\\ &\lambda p_2 + \mu(s+q_2) + \nu r_2 = 0,\\ &\lambda p_3 + \mu q_3 + \nu(s+r_3) = 0.\end{aligned}\right.$$

Les constantes λ, μ, ν ne devant pas être nulles à la fois, on aura

$$\begin{vmatrix} s+p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & s+q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & s+r_3 \end{vmatrix} = 0,$$

équation du troisième ordre en s (en général d'ordre n) dite *équation caractéristique* du système (7). Soient s_1, s_2, s_3 ses trois racines; pour $s = s_1$, les équations (8) se réduisent à deux et donnent des valeurs proportionnelles, λ_1, μ_1, ν_1, des constantes λ, μ, ν, d'où la solution

$$y = \lambda_1 e^{s_1 x}, \qquad z = \mu_1 e^{s_1 x}, \qquad t = \nu_1 e^{s_1 x}.$$

De même, si s_1, s_2, s_3 sont distincts, on aura les deux autres solutions

$$y = \lambda_2 e^{s_2 x}, \qquad z = \mu_2 e^{s_2 x}, \qquad t = \nu_2 e^{s_2 x},$$
$$y = \lambda_3 e^{s_3 x}, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots;$$

d'où l'on déduira la solution générale

$$y = c_1 \lambda_1 e^{s_1 x} + c_2 \lambda_2 e^{s_2 x} + c_3 \lambda_3 e^{s_3 x},$$
$$z = c_1 \mu_1 e^{s_1 x} + c_2 \mu_2 e^{s_2 x} + c_3 \mu_3 e^{s_3 x},$$
$$t = c_1 \nu_1 e^{s_1 x} + c_2 \nu_2 e^{s_2 x} + c_3 \nu_3 e^{s_3 x};$$

en admettant toutefois que les trois solutions sont indépendantes, et l'on peut établir qu'elles le sont si s_1, s_2, s_3 sont distincts.

370. Si l'équation caractéristique a des racines égales, la méthode précédente ne donne pas n solutions distinctes du système proposé; on peut, en ce cas, trouver les solutions qui manquent par un raisonnement analogue à celui de d'Alembert (n° 351).

Pour faire comprendre la méthode, prenons un cas particulier, soit le système

$$(\mathrm{S}') \qquad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} - 3y + z = 0, \\[2mm] \dfrac{dz}{dx} - 4y + z = 0. \end{cases}$$

Les équations (8) sont ici

$$(8') \qquad \begin{cases} \lambda(s-3) + \mu = 0, \\ -4\lambda + \mu(s+1) = 0; \end{cases}$$

d'où l'équation caractéristique

$$(s-3)(s+1) + 4 = 0, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad (s-1)^2 = 0.$$

Il y a une racine double $s = 1$.

Modifions infiniment peu les coefficients de la *seconde* équation du système proposé de manière que l'équation caractéristique ait deux racines s' et s'' inégales, voisines de 1; la première des équations (8′), dont les coefficients dépendent *uniquement* de ceux de la première équation (S′), n'a pas changé; elle donne pour λ et μ les valeurs proportionnelles

$$\lambda = 1, \qquad \mu = -s + 3;$$

d'où les deux solutions du système

(9') $$y = e^{s'x}, \qquad z = (-s' + 3)e^{s'x},$$

et

$$y = e^{s''x}, \qquad z = (-s'' + 3)e^{s''x}.$$

On peut remplacer la seconde par la combinaison

$$y = \frac{e^{s''x} - e^{s'x}}{s'' - s'}, \qquad z = \frac{(-s'' + 3)e^{s''x} - (-s' + 3)e^{s'x}}{s'' - s'};$$

si l'on fait tendre s'' et s' vers 1, cette solution devient, à la limite,

$$y = \frac{d}{ds}(e^{sx}), \qquad z = \frac{d}{ds}[(-s + 3)e^{sx}],$$

pour $s = 1$, c'est-à-dire

$$y = xe^{x}, \qquad z = e^{x}(-1 + 2x).$$

Cette solution jointe à la solution (9'), où $s' = 1$,

$$y = e^{x}, \qquad z = 2e^{x},$$

fournit la solution générale

$$y = c_1 e^{x} + c_2 x e^{x}, \qquad z = 2c_1 e^{x} + c_2(-1 + 2x)e^{x},$$

qu'on eût aussi obtenue par la méthode du n° 360.

En général, si l'équation caractéristique a une racine, s, multiple d'ordre k, on cherchera des solutions de la forme

$$\begin{aligned} y &= \lambda_0 e^{sx} + \lambda_1 x e^{sx} + \ldots + \lambda_{k-1} x^{k-1} e^{sx}, \\ z &= \mu_0 e^{sx} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \mu_{k-1} x^{k-1} e^{sx}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

et l'on déterminera les coefficients λ_i, μ_i, ..., par substitution directe. On trouvera ainsi que ces coefficients dépendent, d'une manière linéaire et homogène, de k constantes arbitraires; d'où k solutions correspondant à la racine multiple d'ordre k.

371. Remarque I. — Les systèmes d'équations différentielles à coefficients constants, avec ou sans seconds membres, se rencontrent dans un grand nombre de problèmes de Mécanique et de Physique mathématique, où l'on étudie de *petits* changements

d'état d'un système : par exemple, dans la théorie des petites oscillations, des vibrations élastiques, des ondulations lumineuses, des remous, etc.

En effet, dans l'étude de ces phénomènes, on regarde les corps comme composés de molécules séparées, dont chacune a un petit mouvement : soient y, z, t, ... les distances de ces molécules à leur position d'équilibre, x le temps; les vitesses $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, ... sont supposées fonctions du temps et de la position des molécules à l'instant considéré, en sorte que l'on a

$$\frac{dy}{dx}=f_1(x, y, z, \ldots), \qquad \frac{dz}{dx}=f_2(x, y, z, \ldots), \qquad \ldots .$$

Les mouvements étant très petits, y, z, ... sont voisins de zéro, et l'on remplace f_i par $f_i(x, 0, 0, \ldots)+y\frac{\partial f_i}{\partial y}+z\frac{\partial f_i}{\partial z}+\ldots$, en se bornant aux termes du premier degré en y, z, ...; les équations du problème prennent alors la forme

$$\frac{dy}{dx}+P_1y+Q_1z+\ldots=V_1,$$
$$\frac{dz}{dx}+P_2y+Q_2z+\ldots=V_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

les P, Q, ..., V étant des fonctions du temps x. C'est un système linéaire à coefficients variables.

Mais, la plupart du temps, le système matériel considéré n'est soumis qu'aux influences mutuelles de ses parties, ou à des actions qui dépendent uniquement de la position de ses molécules, de sorte que le temps, x, ne figure pas explicitement dans les fonctions f_1, f_2 ..., ni par suite dans les fonctions P, Q, V. Le système d'équations différentielles est alors à coefficients constants (généralement sans seconds membres) et de là vient l'importance des systèmes de cette nature.

372. Remarque. — Il n'est pas nécessaire, pour intégrer un système d'équations linéaires, à coefficients constants, sans seconds membres, de le ramener d'abord à la forme canonique comme

nous l'avons supposé. Soit par exemple le système

$$(10)\quad \begin{cases} A\dfrac{d^2y}{dx^2} + B\dfrac{dy}{dx} + Cy + D\dfrac{d^2z}{dx^2} + E\dfrac{dz}{dx} + Fz = 0, \\ A'\dfrac{d^2y}{dx^2} + B'\dfrac{dy}{dx} + C'y + D'\dfrac{d^2z}{dx^2} + E'\dfrac{dz}{dx} + F'z = 0, \end{cases}$$

où A, B, ..., F' sont des constantes. On l'intégrera de suite en cherchant des solutions de la forme

$$y = \lambda e^{sx}, \qquad z = \mu e^{sx}.$$

Substituant ces valeurs dans les équations proposées, et divisant par e^{sx}, on a

$$(11)\quad \begin{cases} \lambda(As^2 + Bs + C) + \mu(Ds^2 + Es + F) = 0, \\ \lambda(A's^2 + B's + C') + \mu(D's^2 + E's + F') = 0; \end{cases}$$

d'où

$$\begin{vmatrix} As^2 + Bs + C & Ds^2 + Es + F \\ A's^2 + B's + C' & D's^2 + E's + F' \end{vmatrix} = 0,$$

équation en s qui a quatre racines, s_1, s_2, s_3, s_4. Pour $s = s_1$, les équations (11) se réduisent à une seule, la première par exemple, d'où l'on tire les valeurs proportionnelles de λ et μ; ce qui donne la solution

$$y_1 = (Ds_1^2 + Es_1 + F)e^{s_1x}, \qquad z_1 = -(As_1^2 + Bs_1 + C)e^{s_1x}.$$

Les racines s_2, s_3, s_4 donneraient de même des solutions y_2, z_2; y_3, z_3; y_4, z_4; et il est clair que l'on aura une solution du système (10) en posant

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + c_3y_3 + c_4y_4, \qquad z = c_1z_1 + c_2z_2 + c_3z_3 + c_4z_4.$$

A priori cette solution est la solution générale, car elle renferme quatre constantes arbitraires, et le système (10), ramené à la forme canonique, serait d'ordre 4.

Si l'équation en s avait des racines égales, on opérerait comme au n° 370.

CHAPITRE V.

ÉTUDE DES INTÉGRALES D'UNE ÉQUATION LINÉAIRE.

I. — GÉNÉRALITÉS.

373. Comme on l'a dit au n° 328, l'intégrale générale d'une équation linéaire (sans second membre) où le coefficient de la plus haute dérivée a été ramené à l'unité, n'a pas d'autres points critiques à distance finie que ceux des coefficients de l'équation : dès lors, pour connaître la nature analytique de l'intégrale générale, il importe de l'étudier au voisinage de ces points critiques; nous ferons cette étude dans l'hypothèse où l'équation est du second ordre : on verra aisément que la méthode et les résultats sont généraux.

374. Soit donc l'équation du second ordre

$$(1)\qquad \frac{d^2y}{dx^2}+p_1(x)\frac{dy}{dx}+p_2(x)y=0,$$

où p_1 et p_2 sont des fonctions de x, dont l'une au moins admet comme point critique le point $x=a$: on supposera que a est, pour cette fonction, un *pôle* ou un *point singulier essentiel*, de telle sorte que $p_1(x)$ et $p_2(x)$ reprennent la même valeur quand la variable x décrit un petit cercle autour du point a [1].

Cela posé, soient $y_1(x)$ et $y_2(x)$ deux solutions particulières, indépendantes, de l'équation (1) : si x décrit un petit cercle autour de a dans le sens positif, l'équation (1) ne change pas, et sa solution générale reste de la forme $c_1y_1+c_2y_2$; $y_1(x)$ au contraire peut changer, et revenir au point de départ, x, avec une valeur,

---

[1] Si a était un point de branchement pour $p_1(x)$ ou $p_2(x)$, l'équation différentielle changerait quand x tournerait autour de a, et une théorie générale serait impossible : il faudrait une étude spéciale dans chaque cas particulier.

$Y_1(x)$; mais comme $Y_1(x)$ est encore solution de (1) on a

(2) $$Y_1(x) = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \qquad (\lambda_1, \lambda_2 = \text{const.}),$$

et de même, en désignant par Y_2 ce que devient y_2 quand x tourne une fois autour de a,

(3) $$Y_2(x) = \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2. \qquad (\mu_1, \mu_2 = \text{const.}).$$

D'après cela, α_1 et α_2 désignant des constantes, la solution $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$ devient

$$\alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2,$$

c'est-à-dire

$$(\alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\mu_1) y_1 + (\alpha_1\lambda_2 + \alpha_2\mu_2) y_2;$$

cherchons à déterminer α_1 et α_2 de manière que $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$ *se reproduise multiplié par un facteur constant, s*. Il faut que :

(4) $$\begin{cases} \alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\mu_1 = s\alpha_1, \\ \alpha_1\lambda_2 + \alpha_2\mu_2 = s\alpha_2, \end{cases}$$

d'où, par élimination du rapport $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$,

(5) $$\begin{vmatrix} \lambda_1 - s & \mu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 - s \end{vmatrix} = 0.$$

équation du *second* degré en s, dont nous désignerons les racines par s_1 et s_2.

375. Supposons d'abord $s_1 \gtrless s_2$. Pour $s = s_1$ ou $s = s_2$, les équations (4) en α_1 et α_2 sont compatibles et donnent des valeurs proportionnelles de ces constantes, ce qui détermine *deux* (¹) solutions de l'équation différentielle proposée, *et deux seulement* (²) :

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \quad \text{ou} \quad z_1(x), \qquad \alpha'_1 y_1 + \alpha'_2 y_2 \quad \text{ou} \quad z_2(x),$$

qui se reproduisent multipliées respectivement par des constantes

(¹) En regardant comme une seule solution $z_1(x)$ et $c_1 z_1(x)$, où $c_1 = \text{const.}$

(²) Les équations (4) en α_1 et α_2 ne sont des identités, pour $s = s_1$ par exemple, que si $\lambda_1 = \mu_2 = s_1$ et $\lambda_2 = \mu_1 = 0$. En ce cas l'équation en s se réduit à $(\lambda_1 - s)(\mu_2 - s) = 0$, c'est-à-dire $(s - s_1)^2 = 0$, et elle a ses racines égales, cas exclu.

(s_1 et s_2) quand x tourne une fois, dans le sens positif, autour du point $x = a$.

Je dis que ces deux solutions sont *distinctes*, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de relation identique de la forme

$$(6) \qquad c_1 z_1(x) + c_2 z_2(x) = 0 \qquad (c_1, c_2 = \text{const.}).$$

En effet, si une pareille relation existe *identiquement*, elle subsiste quand x décrit un cercle autour de a, c'est-à-dire qu'on a aussi

$$c_1 s_1 z_1(x) + c_2 s_2 z_2(x) = 0,$$

d'où l'on conclut, par comparaison avec (6),

$$s_1 = s_2,$$

ce qui est contraire à l'hypothèse.

De là se déduit aisément la nature des fonctions z_1 et z_2 autour du point a.

En effet, la fonction $(x - a)^q$, quand x tourne une fois autour de a dans le sens positif, se reproduit (n° 97) multipliée par $e^{2q\pi i}$; si donc on choisit q de manière que $e^{2q\pi i} = s_1$, c'est-à-dire si l'on a

$$q = \frac{1}{2\pi i} \log s_1,$$

la fonction se reproduira multipliée par s_1, comme la fonction $z_1(x)$: il en résulte que le quotient

$$\frac{z_1(x)}{(x-a)^{\frac{1}{2\pi i}\log s_1}}$$

se reproduit multiplié par $\frac{s_1}{s_1}$, ou 1, c'est-à-dire est uniforme *autour* du point a. Ce point ne peut donc être, pour le quotient, qu'un point ordinaire, un pôle, ou un point singulier essentiel. Donc, autour de a, l'on aura

$$(7) \qquad z_1(x) = (x-a)^{\frac{1}{2\pi i}\log s_1} G_1(x),$$

$G_1(x)$ étant une fonction uniforme autour de a, développable par la *série de Laurent* (n^{os} **121-122**) sous la forme :

$$(8) \qquad \left\{ \begin{aligned} G_1(x) = \ldots + \frac{B_n}{(x-a)^n} + \ldots + \frac{B_1}{x-a} \\ + A_0 + A_1(x-a) + \ldots + A_n(x-a)^n + \ldots . \end{aligned} \right.$$

Les termes à puissances négatives en $x - a$ disparaissent complètement, ou ne sont qu'en nombre limité, si a est un point ordinaire ou un pôle de $G(x)$. On a de même

$$(9) \qquad z_2(x) = (x-a)^{\frac{1}{2\pi i}\log s_2} G_2(x),$$

$G_2(x)$ ayant, autour du point a, un développement de la forme (8).

376. Ainsi :

L'équation (5) *en* s *ayant ses racines* s_1 *et* s_2 *distinctes, l'équation différentielle proposée* (1) *admet deux solutions indépendantes (et deux seulement),* z_1 *et* z_2, *des formes*

$$(10) \qquad z_1 = (x-a)^{r_1} G_1(x), \qquad z_2 = (x-a)^{r_2} G_2(x),$$

où $r_1 = \frac{1}{2\pi i}\log s_1$, $r_2 = \frac{1}{2\pi i}\log s_2$, *et où* $G_1(x)$ *et* $G_2(x)$ *sont des fonctions uniformes aux environs de* a, *développables autour de ce point par la série de Laurent.*

L'intégrale générale de la proposée, qui est $c_1 z_1 + c_2 z_2$, est dès lors d'une forme connue autour du point a.

377. Remarque. — Si l'on était parti primitivement de deux solutions autres que y_1 et y_2, également indépendantes entre elles, on aurait été conduit *à la même équation* (5) en s : car il n'y a que *deux* solutions de l'équation différentielle (1) qui, lorsque la variable x tourne autour du point a, se reproduisent multipliées par des constantes, ainsi qu'on l'a vu plus haut. On retrouvera donc, pour les deux constantes, les mêmes valeurs s_1 et s_2 que dans le premier calcul. Il en résulte que les coefficients de l'équation en s, ou plutôt leurs rapports, sont des *invariants*, c'est-à-dire ne dépendent que de l'équation (1), et non des solutions y_1, y_2 choisies primitivement.

378. Supposons maintenant $s_1 = s_2$. On voit, comme plus haut, que l'équation proposée (1) admet *une* solution z_1, de la forme

$$(7) \qquad z_1 = (x-a)^{\frac{1}{2\pi i}\log s_1} G_1(x),$$

qui se reproduit multipliée par s_1 quand x tourne une fois autour du point a dans le sens positif. Prenons maintenant, pour solutions indépendantes de l'équation (1), z_1 et une autre solution y_1; quand x tourne une fois autour de a dans le sens positif, y_1 devient Y_1 :

$$Y_1 = \rho_1 y_1 + \rho_2 z_1,$$

et, comme z_1 devient $s_1 z_1$, l'équation en s est

$$\begin{vmatrix} \rho_1 - s & 0 \\ \rho_2 & s_1 - s \end{vmatrix} = 0.$$

Pour qu'elle admette la racine double s_1, il faut que $\rho_1 = s_1$. Donc on a

$$Y_1 = s_1 y_1 + \rho_2 z_1,$$

ou

$$\frac{Y_1}{s_1 z_1} = \frac{y_1}{z_1} + \frac{\rho_2}{s_1}.$$

Or la fonction $\frac{y_1}{z_1}$, lorsque x décrit un cercle autour de a dans le sens positif, devient $\frac{Y_1}{s_1 z_1}$; la relation précédente montre par suite qu'elle se reproduit, à la constante additive près $\frac{\rho_2}{s_1}$.

La fonction $\frac{\rho_2}{2\pi i s_1}\log(x - a)$ jouit évidemment de la même propriété, de sorte que la différence

$$\frac{y_1}{z_1} - \frac{\rho_2}{2\pi i s_1}\log(x - a)$$

est une fonction, $K(x)$, uniforme autour du point a, c'est-à-dire une fonction développable autour de ce point par la série de Laurent (n° 121).

On a donc

$$y_1 = z_1 \frac{\rho_2}{2\pi i s_1}\log(x - a) + z_1 K(x),$$

c'est-à-dire, en remplaçant z_1 par sa valeur (7),

$$y_1 = (x - a)^{\frac{1}{2\pi i}\log s_1}[K_1(x) + h\, G_1(x)\log(x - a)],$$

$K_1(x)$, égal à $K(x) G_1(x)$, étant une fonction de même nature que K et G_1, et h désignant une constante.

379. Ainsi :

L'équation (5) *en* s *ayant ses racines égales à* s_1, *l'équation différentielle proposée admet deux solutions,* z_1 *et* y_1, *des formes*

$$(11)\qquad \begin{cases} z_1 = (x-a)^{r_1} G_1(x), \\ y_1 = (x-a)^{r_1}[K_1(x) + h\, G_1(x) \log(x-a)], \end{cases}$$

où r_1 *est égal à* $\frac{1}{2\pi i}\log s_1$, h *une constante, et où* G_1 *et* K_1 *sont des fonctions uniformes aux environs de* a, *développables autour de ce point par la série de Laurent.*

L'intégrale générale, $c_1 z_1 + c'_1 y_1$, est dès lors de la même forme que y_1 autour du point a.

380. Il résulte de cette étude que les propriétés de l'intégrale aux environs du point a sont liées à l'équation en s qui correspond à ce point; mais on ne sait pas former facilement et directement cette équation *dans le cas général,* parce que les coefficients λ_1, λ_2, μ_1, μ_2 qui y figurent sont inconnus *a priori* (¹). Il serait également très difficile de calculer les coefficients des développements en séries de Laurent des fonctions G_1, G_2 ou K_1.

On se bornera donc, dans ce qui suit, à l'étude *d'un cas particulier* très étendu, qui est d'ailleurs le plus intéressant.

381. Ce cas est celui où les fonctions G_1, G_2 et K_1 admettent le point a comme pôle ou point ordinaire : leurs développements en série de Laurent sont alors limités du côté des puissances négatives, et l'on dit que l'intégrale générale est *régulière* autour du point a. Nous particulariserons encore le cas en supposant que le terme en $\log(x-a)$ disparaît dans la solution générale : ce terme n'existe pas si $s_1 \gtrless s_2$ [équations (10)]; pour $s_1 = s_2$, il disparaîtra lorsque h sera nul [équation (11)].

En vertu de ces hypothèses et des formules (10) ou (11), l'équation différentielle aura deux solutions indépendantes des formes

(¹) Pour les obtenir il faudrait suivre, par la méthode du n° 330, la variation des deux solutions y_1 et y_2 de la proposée, quand la variable x tourne autour du point a.

$z_1 = (x-a)^{r_1} G_1(x)$; $z_2 = (x-a)^{r_2} G_2(x)$, G_1 et G_2 admettant le point a comme pôle ou comme point ordinaire, et r_1 pouvant être égal à r_2. D'ailleurs, si a est un pôle d'ordre α de $G_1(x)$, $(x-a)^{\alpha} G_1(x)$ sera une fonction *holomorphe* autour du point a; désignant cette fonction par $H_1(x)$, on a la solution

$$z_1 = (x-a)^{r_1-\alpha} H_1(x),$$

c'est-à-dire que la proposée admettra deux solutions distinctes des formes $(x-a)^{r'_1} H_1(x)$; $(x-a)^{r'_2} H_2(x)$, H_1 et H_2 étant holomorphes autour du point a.

La première question qui se pose est de reconnaître, sur l'équation différentielle proposée, dans quel cas il en sera effectivement ainsi; de là le problème suivant, qu'on va chercher à résoudre.

382. Énoncé du problème. — *Étant donnée l'équation linéaire*

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p_1(x)\frac{dy}{dx} + p_2(x)y = 0,$$

trouver les conditions nécessaires et suffisantes que doivent remplir les fonctions $p_1(x)$ et $p_2(x)$ pour que, autour d'un point $x = a$ du plan, l'équation admette deux solutions distinctes de la forme

$$(x-a)^{r_1} H_1(x), \qquad (x-a)^{r_2} H_2(x),$$

$H_1(x)$ *et* $H_2(x)$ *étant holomorphes autour du point* a (¹).

Remarques. — 1° On pourra supposer $H_1(a)$ et $H_2(a) \gtrless 0$; sinon $H_1(x)$, par exemple, développé par la formule de Taylor :

$$H_1(x) = H_1(a) + (x-a)H'_1(a) + \ldots,$$

contiendrait en facteur une certaine puissance de $x-a$, qu'on pourrait réunir à $(x-a)^{r_1}$, ce qui ne ferait que changer la valeur de la constante r_1.

Par suite, en multipliant H_1 et H_2 par des facteurs constants

(¹) Dans tout ce qui suit, la lettre H désignera une fonction holomorphe autour du point a.

convenables, on pourra supposer $H_1(a) = H_2(a) = 1$, de sorte que, si l'on développe $H_1(x)$ et $H_2(x)$ par la formule de Taylor, l'équation proposée doit admettre les deux solutions

$$z_1 = (x-a)^{r_1} + c_1(x-a)^{r_1+1} + c_2(x-a)^{r_1+2} + \dots,$$
$$z_2 = (x-a)^{r_2} + c'_1(x-a)^{r_2+1} + c'_2(x-a)^{r_2+2} + \dots,$$

les deux séries étant convergentes autour du point $x = a$.

2° Observons que, si $r_1 = r_2$, l'équation différentielle admet la solution

$$z_1 - z_2 = c''_1(x-a)^{r_1+1} + c''_2(x-a)^{r_1+2} + \dots,$$

qui commence par un terme en $(x-a)^{r_1+h}$, h étant entier et $\geqq 1$.

On aura donc toujours le droit de supposer $r_2 \gtrless r_1$, puisque si r_2 était égal à r_1, on remplacerait z_2 par la solution $z_1 - z_2$, qui correspond à l'exposant $r_1 + h$.

383. **Théorème.** — *Pour que l'équation*

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p_1(x)\frac{dy}{dx} + p_2(x)y = 0$$

admette deux solutions distinctes des formes

$$x_1 = (x-a)^{r_1} H_1(x), \qquad z_2 = (x-a)^{r_2} H_2(x),$$

H_1 *et* H_2 *étant holomorphes autour du point* a, *il est nécessaire (mais non suffisant) que* a *soit un point ordinaire ou un pôle d'ordre* i *au plus pour la fonction* p_i, *de* x $(i = 1, 2)$.

En effet, en exprimant que $(x-a)^{r_1} H_1(x)$ est une solution de l'équation, on obtient, après division par $(x-a)^{r_1-2}$,

$$\begin{aligned} 0 = {} & [r_1(r_1-1)H_1(x) + 2r_1(x-a)H'_1(x) + (x-a)^2 H''_1(x)] \\ & + (x-a)[r_1 H_1 + (x-a)H'_1]p_1(x) + (x-a)^2 H_1 p_2(x). \end{aligned}$$

De même, en écrivant que $(x-a)^{r_2} H_2$ est une solution :

$$\begin{aligned} 0 = {} & [r_2(r_2-1)H_2(x) + 2r_2(x-a)H'_2(x) + (x-a)^2 H''_2(x)] \\ & + (x-a)[r_2 H_2 + (x-a)H'_2]p_1(x) + (x-a)^2 H_2 p_2(x). \end{aligned}$$

On tire de là, pour $(x-a)p_1$ et $(x-a)^2 p_2$, deux valeurs, dont le dénominateur commun est la fonction holomorphe autour du point a, $(r_1 - r_2)H_1(x)H_2(x) + (x-a)[H_2 H'_1 - H_1 H'_2]$.

et dont le numérateur est aussi une fonction holomorphe de x aux environs de $x=a$. Or le dénominateur ne s'annule pas pour $x=a$, car il se réduit à $(r_1-r_2)\mathrm{H}_1(a)\mathrm{H}_2(a)$, quantité non nulle, puisque $\mathrm{H}_1(a)=\mathrm{H}_2(a)=1$ et que $r_1 \gtrless r_2$: on en conclut que $(x-a)p_1(x)$ et $(x-a)^2 p_2(x)$ sont holomorphes autour du point a, c'est-à-dire que $p_1(x)$ admet a comme point ordinaire ou comme pôle d'ordre *un* au plus, et que $p_2(x)$ l'admet comme point ordinaire ou comme pôle d'ordre *deux* au plus.

C. Q. F. D.

D'ailleurs, si a est point ordinaire pour les *deux* fonctions $p_1(x)$ et $p_2(x)$, l'intégrale générale de l'équation proposée est holomorphe autour de a, d'après le n° 328, sans qu'il y ait d'autre condition à vérifier; il suffit donc d'étudier le cas où a est un *pôle* de l'une au moins des deux fonctions.

384. Soit donc a un pôle d'ordre un, au plus, pour $p_1(x)$, et deux, au plus, pour $p_2(x)$; on a autour de ce point

$$(12)\quad \begin{cases} p_1(x) = \dfrac{\mathrm{A}}{x-a} + \alpha_0 + \alpha_1(x-a) + \alpha_2(x-a)^2 + \ldots, \\ p_2(x) = \dfrac{\mathrm{B}}{(x-a)^2} + \dfrac{\mathrm{C}}{x-a} + \beta_0 + \beta_1(x-a) + \ldots, \end{cases}$$

les coefficients A, B, C pouvant être nuls, mais non simultanément, car a est un pôle pour l'une *au moins* des deux fonctions.

Exprimons maintenant que l'équation différentielle proposée admet une solution de la forme

$$z = (x-a)^r \mathrm{H}(x),$$

c'est-à-dire

$$z = (x-a)^r + c_1(x-a)^{r+1} + c_2(x-a)^{r+2} + \ldots$$

Nous avons, en remplaçant dans l'équation $p_1(x)$ et $p_2(x)$ par leurs valeurs (12),

$$(13)\quad \begin{cases} 0 = r(r-1)(x-a)^{r-2} + c_1(r+1)r(x-a)^{r-1} \\ \qquad + c_2(r+2)(r+1)(x-a)^r + \ldots \\ \quad + [r(x-a)^{r-1} + c_1(r+1)(x-a)^r + \ldots]\left[\dfrac{\mathrm{A}}{x-a} + \alpha_0 + \alpha_1(x-a) + \ldots\right] \\ \quad + [(x-a)^r + c_1(x-a)^{r+1} + \ldots]\left[\dfrac{\mathrm{B}}{(x-a)^2} + \dfrac{\mathrm{C}}{x-a} + \beta_0 + \ldots\right]. \end{cases}$$

Égalons maintenant à zéro les coefficients des diverses puissances de $(x-a)$ dans le second membre.

Le terme de moindre degré est celui en $(x-a)^{r-2}$, qui donne

$$r(r-1)+Ar+B=0. \tag{14}$$

De même le terme suivant, en $(x-a)^{r-1}$, donne

$$c_1[(r+1)r+A(r+1)+B]+\alpha_0 r+C=0, \tag{15}$$

et, en général, le terme en $(x-a)^{r+m-2}$ donne

$$\left\{\begin{aligned} &c_m[(r+m)(r+m-1)+A(r+m)+B] \\ &\qquad +c_{m-1}(\quad)+c_{m-2}(\quad)+\ldots=0. \end{aligned}\right. \tag{16}$$

L'équation (14) ne contient, comme quantité inconnue, que r; elle détermine donc r, et donne pour r *deux* valeurs, que nous désignerons par r_1 et r_2. Elle s'appelle l'*équation déterminante* relative au point a; nous représenterons son premier membre par $F(r)$, en posant

$$F(r)=r(r-1)+Ar+B.$$

L'équation (15), qui s'écrit

$$c_1 F(r+1)+\alpha_0 r+C=0,$$

donne c_1, pourvu qu'on ait $F(r+1)\gtrless 0$; de même, en général, l'équation (16), *où le coefficient de* c_m *est* $F(r+m)$, donnera c_m en fonction des coefficients précédents, pourvu qu'on ait

$$F(r+m)\lessgtr 0.$$

Il y a dès lors deux cas à distinguer.

385. Premier cas. — *Les racines r_1 et r_2 de l'équation déterminante ont une différence qui n'est pas un nombre entier.*

Dans ce cas, en faisant $r=r_1$ dans les équations (15) et (16), on détermine successivement, sans ambiguïté ni impossibilité, les coefficients $c_1, c_2, \ldots, c_m, \ldots$. En effet, aucune des quantités $F(r_1+1), F(r_1+2), \ldots, F(r_1+m), \ldots$ n'est nulle, puisque $F(r)$ ne s'annule que pour $r=r_1$, $r=r_2$ et que r_2 n'est pas de la forme r_1+m, par hypothèse. On obtient ainsi le développement

d'une solution z_1 :

$$z_1 = (x-a)^{r_1}[1 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \ldots],$$

et il ne resterait, pour compléter le raisonnement, qu'à établir la convergence de la série, tout au moins pour les valeurs de $\bmod(x-a)$ assez petites, *point que nous admettrons sans démonstration* (Théorème de Fuchs).

On fait le même raisonnement avec la racine r_2, et l'on détermine de même une solution correspondante z_2. Donc enfin :

Si a est un pôle d'ordre un au plus pour $p_1(x)$, deux au plus pour $p_2(x)$, et si l'équation déterminante, relative au point a, a pour racines deux quantités r_1 et r_2, dont la différence n'est pas entière, l'équation $\frac{d^2y}{dx^2} + p_1(x)\frac{dy}{dx} + p_2(x)y = 0$ *admet deux solutions (évidemment distinctes), z_1 et z_2, des formes*

$$z_1 = (x-a)^{r_1} H_1(x), \qquad z_2 = (x-a)^{r_2} H_2(x),$$

$H_1(x)$ *et* $H_2(x)$ *étant holomorphes autour du point a, et non nuls pour* $x = a$.

386. Deuxième cas. — *Les racines r_1 et r_2 de l'équation déterminante ont pour différence un nombre entier.*

1° Si ce nombre est nul, c'est-à-dire si $r_1 = r_2$, il est *impossible* que l'équation admette *deux* solutions distinctes, des formes $(x-a)^{q_1} H_1(x)$ et $(x-a)^{q_2} H_2(x)$: en effet, si ces solutions existaient, d'après les calculs du n° 384, q_1 et q_2 seraient racines de l'équation déterminante, c'est-à-dire que, *nécessairement*, on aurait $q_1 = q_2 = r_1$; mais on a vu qu'on avait le droit de supposer $q_1 \lesseqgtr q_2$ (n° 382, Remarque 2°) : les *deux* solutions ne peuvent donc exister. On reconnaît, comme au numéro précédent, qu'il existe *une* solution de la forme $(x-a)^{r_1} H_1(x)$.

2° Si la différence $r_2 - r_1$ est entière et non nulle, *soit r_1 la plus petite des deux racines;* on aura

$$r_2 = r_1 + n,$$

n étant entier et au moins égal à 1.

En ce cas, il y a toujours une solution de la forme

$$(x-a)^{r_2} H_2(x);$$

$F(r)$, en effet, n'admettant pas de racine supérieure à r_2, les quantités $F(r_2+1)$, $F(r_2+2)$, ..., $F(r_2+m)$, ... sont toutes différentes de zéro, et le calcul des coefficients c' du développement

$$z_2 = (x-a)^{r_2}[1 + c'_1(x-a) + c'_2(x-a)^2 + \ldots]$$

se fait, sans ambiguïté ni impossibilité, comme on l'a vu aux numéros précédents.

Reste à voir s'il existe une solution de la forme $(x-a)^{r_1} H_1(x)$, c'est-à-dire

$$z_1 = (x-a)^{r_1}[1 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \ldots].$$

Le calcul des coefficients c se fait sans difficulté jusqu'au coefficient c_n, n étant l'entier défini ci-dessus; car $F(r_1+1)$, $F(r_2+2)$, ..., $F(r_1+n-1)$ sont différents de zéro.

Au contraire, l'équation (16), qui doit donner c_n, est

$$(16\ bis) \qquad c_n F(r_1+n) + c_{n-1}(\quad) + c_{n-2}(\quad) + \ldots = 0,$$

et le coefficient de c_n, c'est-à-dire $F(r_1+n)$ ou $F(r_2)$, est nul. Il reste alors une équation entre les quantités c_{n-1}, c_{n-2}, ..., c_1, précédemment déterminées, et, si l'on remplace ces quantités par leurs valeurs trouvées, on obtient une relation entre r_1 et les coefficients des développements (12) de $p_1(x)$ et $p_2(x)$ autour du point $x=a$.

Si cette relation n'est pas vérifiée, *et c'est le cas général*, le calcul des coefficients c est impossible, c'est-à-dire qu'il n'existe certainement pas de solution de la forme $(x-a)^{r_1} H_1(x)$.

Si elle est vérifiée, l'équation qui suit celle qui devait donner c_n fournira c_{n+1} en fonction de c_n, c_{n-1}, ..., c_1; la suivante donnera c_{n+2}, et ainsi de suite, sans impossibilité : le coefficient c_n restera donc indéterminé. Il y aura dès lors une infinité de solutions de la forme $(x-a)^{r_1} H_1(x)$, ayant les mêmes termes en $(x-a)$ jusqu'au terme $c_n(x-a)^{r_1+n}$ exclusivement : ce résultat pouvait être prévu, car s'il existe une solution $(x-a)^{r_1} H_1(x)$ et une solution $(x-a)^{r_2} H_2(x)$, il y aura, puisque $r_2 = r_1 + n$, la solution

$$(x-a)^{r_1}[H_1(x) + \lambda(x-a)^n H_2(x)],$$

λ étant une constante arbitraire; le crochet est encore une fonction holomorphe de x autour du point a, puisque n est entier, et le coefficient du terme en $(x-a)^n$ y est indéterminé.

De là résultent, en admettant toujours la convergence des développements obtenus, ces propositions :

Si a est un pôle d'ordre un au plus pour $p_1(x)$, deux au plus pour $p_2(x)$, et si les racines r_1, r_2 de l'équation déterminante sont égales, l'équation différentielle proposée admettra une *solution de la forme $(x-a)^{r_1}H_1(x)$, mais n'en admettra* jamais *une seconde.*

Dans les mêmes conditions, si la différence r_2-r_1 est entière, et si $r_2>r_1$, il y aura toujours une solution de la forme $(x-a)^{r_2}H_2(x)$; pour qu'il y ait aussi une solution de la forme $(x-a)^{r_1}H_1(x)$, il faut et il suffit qu'une certaine condition auxiliaire (¹) *soit vérifiée par les coefficients de l'équation différentielle.*

Dans ces énoncés, les $H(x)$ désignent toujours des fonctions holomorphes autour du point a, non nulles pour $x=a$.

387. **Résumé.** — *En résumé, pour que l'équation*

$$y''+p_1y'+p_2y=0$$

admette deux solutions distinctes, des formes

$$(x-a)^{r_1}H_1(x),\quad (x-a)^{r_2}H_2(x),$$

H_1 *et* H_2 *étant holomorphes autour du point a, il faut et il suffit :*

1° *Que a soit pour $p_i(x)$ un point ordinaire ou un pôle d'ordre i, au plus.*

(¹) La condition auxiliaire se forme aisément. En effet, si l'on se reporte au n° 386 2°, les équations successives qui donnent $c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}$ sont linéaires par rapport à ces quantités; l'équation (16 *bis*) l'est également, et, par suite, l'élimination de $c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}$ entre ces relations conduit à égaler à zéro un déterminant. Les éléments du déterminant sont les coefficients des quantités c_i, c'est-à-dire des fonctions connues de r_1 et des coefficients (connus) A, B, C, $\alpha_0, \ldots, \alpha_i, \ldots, \beta_0, \ldots, \beta_i, \ldots$ qui figurent dans les développements (12) de $p_1(x)$ et $p_2(x)$ autour du point $x=a$.

Si c'est un point ordinaire pour les deux fonctions p_i, toutes les solutions de l'équation proposée sont holomorphes autour de ce point sans qu'il y ait d'autres conditions à vérifier (n° 328). Si c'est un pôle de l'une au moins des deux fonctions, il faut et il suffit en outre :

2° *Que l'équation déterminante relative au point a ait ses racines distinctes: ces racines sont alors les quantités* r_1 *et* r_2;

3° *Que, si la différence* $r_2 - r_1$ *est entière, une condition auxiliaire, facile à former, soit satisfaite.*

Si ces conditions sont satisfaites, l'intégrale générale de l'équation proposée est $c_1(x-a)^{r_1}H_1(x) + c_2(x-a)^{r_2}H_2(x)$, c_1 et c_2 étant deux constantes arbitraires, et cette formule montre comment l'intégrale se comporte aux environs du point a.

II. — APPLICATIONS.

---

388. **Problème.** — I. *Reconnaître si l'intégrale générale de l'équation* $y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$ *est méromorphe dans tout le plan (à distance finie).*

Il faut et il suffit, pour que l'intégrale soit méromorphe dans tout le plan, qu'elle n'ait comme points critiques *à distance finie* que des pôles. Les points critiques ne peuvent être que ceux de $p_1(x)$ et $p_2(x)$, d'après le n° 328; soit a l'un d'eux. Pour que l'intégrale *générale* soit méromorphe autour de a, il faut et il suffit que l'équation admette autour de a deux solutions distinctes, méromorphes ou holomorphes, c'est-à-dire des formes $(x-a)^{r_1}H_1(x)$ et $(x-a)^{r_2}H_2(x)$, r_1 et r_2 étant des entiers négatifs ou positifs; donc, en vertu de la théorie générale précédente : 1° a devra être pour $p_i(x)$ un point ordinaire ou un pôle d'ordre i au plus; 2° l'équation déterminante correspondante devra avoir ses racines distinctes et entières ; et 3° la condition auxiliaire devra être satisfaite. Il devra en être de même pour tous les points critiques de $p_1(x)$ et $p_2(x)$. Voici donc le résultat.

Pour que l'intégrale générale soit méromorphe dans tout le plan il faut et il suffit :

1° *Que* $p_1(x)$ *et* $p_2(x)$ *n'aient comme points critiques que des pôles d'ordres respectifs un et deux, au plus (ce qui entraîne que* $p_1(x)$ *et* $p_2(x)$ *soient méromorphes dans tout le plan)*;

2° *Qu'en chacun de ces pôles,* a, *l'équation déterminante ait ses deux racines distinctes et entières ;*

3° *Que la condition auxiliaire correspondante y soit vérifiée.*

Soit alors r_1 la plus petite racine de l'équation déterminante relative au point a; le point a est pour l'intégrale générale, $c_1(x-a)^{r_1}H_1(x)+c_2(x-a)^{r_1}H_2(x)$, un zéro d'ordre r_1 (point ordinaire) ou un pôle d'ordre $-r_1$, selon que r_1 est positif ou négatif [car $H_1(a) \gtrless 0$].

On connaît ainsi les pôles de l'intégrale générale, dans le cas où elle est méromorphe, et l'ordre de multiplicité de chacun d'eux.

389. **Problème.** — II. *Reconnaître si l'intégrale générale de l'équation* $y''+p_1(x)y'+p_2(x)y=0$ *est holomorphe dans tout le plan (à distance finie), c'est-à-dire si c'est une fonction entière.*

Le raisonnement est le même que ci-dessus, seulement a ne pourra plus être un pôle pour l'intégrale générale ; ce devra être un point ordinaire, c'est-à-dire qu'en outre des conditions du n° 388, r_1 et r_2 ne pourront être négatifs. Donc :

Pour que l'intégrale générale soit holomorphe dans tout le plan, il faut et il suffit :

1° *Que* $p_1(x)$ *et* $p_2(x)$ *soient des fonctions méromorphes dans tout le plan, avec des pôles respectifs d'ordre un et deux au plus ;*

2° *Qu'en chacun de ces pôles l'équation déterminante ait ses deux racines distinctes, entières et non négatives ;*

3° *Que la condition auxiliaire correspondante y soit vérifiée.*

Dans le cas où $p_1(x)$ et $p_2(x)$ sont *holomorphes dans tout le*

plan (*à distance finie*), l'intégrale générale l'est également, sans autres conditions, d'après le théorème général du n° 328; c'est ce qui se produit, par exemple, dans le cas des équations linéaires à coefficients constants, dont l'intégrale est une somme de termes de la forme $e^{sx}P_m(x)$.

390. **Remarque.** — On peut également reconnaître si l'intégrale générale a un *point critique à l'infini*. Il suffit pour cela de faire dans l'équation différentielle le changement de variable indépendante $x = \frac{1}{u}$: on obtient ainsi une équation linéaire nouvelle en y et u, et l'on étudie, par les méthodes précédentes, la nature du point $u = 0$ pour l'intégrale générale de l'équation transformée.

391. **Problème III.** — *Reconnaître si l'intégrale générale de l'équation* $y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$ *est une fonction rationnelle de* x.

Une fonction rationnelle n'est autre chose (n° 136, 3°) qu'une fonction méromorphe dans tout le plan, pour laquelle le point à l'infini est un point ordinaire ou un pôle. Donc :

Pour que l'intégrale générale soit une fonction rationnelle, il faut et il suffit :

a. Que les conditions du n° 388 *soient satisfaites;*

b. Que, si l'on pose $x = \frac{1}{u}$, *pour obtenir l'équation transformée*

$$\frac{d^2y}{du^2} + \varpi_1(u)\frac{dy}{du} + \varpi_2(u)y = 0, \tag{17}$$

1° *Le point* $u = 0$ *soit un point ordinaire ou un pôle d'ordre* i *au plus pour* $\varpi_i(u)$;

2° *Et si c'est un pôle pour* $\varpi_1(u)$ *ou* $\varpi_2(u)$, *que l'équation déterminante relative à ce point ait ses racines distinctes et entières, et que la condition auxiliaire correspondante soit vérifiée.*

Remarque I. — Si l'intégrale générale est rationnelle, $p_1(x)$ et $p_2(x)$ seront nécessairement des fonctions rationnelles de x;

car, si y_1 et y_2 sont deux solutions rationnelles distinctes, les équations

$$y''_1 + p_1 y'_1 + p_2 y_1 = 0, \qquad y''_2 + p_1 y'_2 + p_2 y_2 = 0$$

donnent p_1 et p_2 en fonction rationnelle de $y_1, y_2, \ldots, y''_2$, c'est-à-dire en fonction rationnelle de x.

Remarque II. — Il est aisé de calculer l'intégrale générale, dans le cas où elle est rationnelle.

Soient $a', a'', \ldots$, les pôles de $p_1(x)$ ou $p_2(x)$ pour lesquels la plus petite racine, r_1, de l'équation déterminante, est positive ou nulle, $r', r'', \ldots$ les valeurs correspondantes de r_1. Soient, de même, $b', b'', \ldots$ les pôles de $p_1(x)$ ou $p_2(x)$ pour lesquels r_1 est négative, et $-s', -s'', \ldots$ les valeurs correspondantes de r_1.

D'après le n° 388, l'intégrale générale, $f(x)$, admettra comme pôles d'ordres $s', s'', \ldots$ les points $b', b'', \ldots$, et n'en aura pas d'autres à distance finie; quant à $a', a'', \ldots$, ce seront, pour $f(x)$, des zéros d'ordres $r', r'', \ldots$, de sorte qu'on aura

$$(18) \qquad f(x) = \frac{(x-a')^{r'}(x-a'')^{r''}\ldots P(x)}{(x-b')^{s'}(x-b'')^{s''}\ldots},$$

$P(x)$ désignant un polynome entier, dont le degré se calcule aisément.

Soient, en effet, d_1 et d les degrés respectifs du numérateur et du dénominateur de $f(x)$; si l'on pose $x = \frac{1}{u}$ on aura

$$f(x) = f\left(\frac{1}{u}\right) = u^{d-d_1} H(u),$$

$H(u)$ étant holomorphe autour du point $u = 0$ et ne s'annulant pas en ce point. Il en résulte immédiatement que $d - d_1$ est la plus petite racine de l'équation déterminante de la transformée (17) relative au point $u = 0$; si donc ρ_1 désigne cette plus petite racine, qu'on sait calculer directement, on aura

$$d - d_1 = \rho_1,$$

d'où, pour le degré, δ, de $P(x)$,

$$(s' + s'' + \ldots) - (r' + r'' + \ldots + \delta) = \rho_1,$$

ou

$$\delta = (s' + s'' + \ldots) - (r' + r'' + \ldots) - \rho_1 = -\rho_1 - \sum r_1.$$

On remplacera dès lors $P(x)$, dans l'expression (18) de $f(x)$, par un polynome de degré δ, à coefficients tous indéterminés, qu'on calculera ensuite en substituant cette valeur de $f(x)$ à y dans l'équation différentielle proposée : on trouvera nécessairement que $P(x)$ renferme deux constantes arbitraires, et est de la forme $\lambda A(x) + \mu B(x)$, A et B étant deux polynomes déterminés. On aura ainsi, par (18), l'intégrale générale cherchée.

392. Exemple. — Soit l'équation

$$(1)\qquad (x^2 - x)\frac{d^2y}{dx^2} + (2x - 3)\frac{dy}{dx} + (-2 + \alpha x + \beta x^2)y = 0;$$

on demande de reconnaître si son intégrale générale est méromorphe dans tout le plan.

On a

$$p_1 = \frac{2x-3}{x(x-1)}, \qquad p_2 = \frac{-2 + \alpha x + \beta x^2}{x(x-1)};$$

les seuls points critiques de p_1 et p_2 sont des pôles $x = 0$, $x = 1$, d'ordre un pour les deux fonctions. Les conditions 1° du n° 388 sont donc satisfaites.

L'équation déterminante relative au point $x = 0$ est, puisque $p_1(x) = \frac{3}{x} + \ldots$; $p_2(x) = \frac{0}{x^2} + \frac{2}{x} + \ldots$,

$$r(r-1) + 3r = 0;$$

ses racines sont $r = 0$, $r = -2$; elles sont distinctes et entières, c'est-à-dire que les conditions 2° sont satisfaites, pour le point $x = 0$.

Reste la condition auxiliaire ; pour la former, puisque -2 est la plus petite racine de l'équation déterminante, substituons à y, dans (1), selon la méthode générale, le développement

$$y = \frac{1}{x^2} + \frac{c_1}{x} + c_2 + c_3 x + \ldots;$$

il vient

$$= (x^2 - x)\left(\frac{6}{x^4} + \frac{2c_1}{x^3} + 2c_4 + \ldots\right) + (2x-3)\left(-\frac{2}{x^3} - \frac{c_1}{x^2} + c_3 + \ldots\right)$$
$$+ (-2 + \alpha x + \beta x^2)\left(\frac{1}{x^2} + \frac{c_1}{x} + c_2 + c_3 x + \ldots\right).$$

et l'on a, en égalant à o les coefficients des termes en $\frac{1}{x^3}$, $\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{x}$,

$$\begin{aligned} &-6 \quad +6 &&= 0, \\ 6 - 2c_1 - &4 \quad + 3c_1 - 2 &&= 0, \quad \text{d'où} \quad c_1 = 0, \\ 2c_1 - 2c_1 - 2c_1 + \alpha & &&= 0, \quad \text{d'où} \quad c_1 = \frac{\alpha}{2}. \end{aligned}$$

Ces deux dernières équations ne sont compatibles que si $\alpha = 0$; c'est la condition auxiliaire pour le point $x = 0$.

Il faut former de même l'équation déterminante relative au point $x = 1$. Pour cela développons $p_1(x)$ et $p_2(x)$ suivant les puissances croissantes de $x - 1 = t$. On a

$$p_1 = \frac{2t-1}{t(1+t)} = \frac{-1}{t} + \ldots, \quad p_2 = \frac{-2+\beta(t+1)^2}{t(1+t)} = \frac{0}{t^2} + \frac{-2+\beta}{t} + \ldots.$$

L'équation déterminante est donc

$$r(r-1) - r = 0,$$

ses racines sont $r = 0$, $r = 2$; elles sont encore distinctes et entières, et il suffit maintenant de former la condition auxiliaire. Remplaçons, dans l'équation proposée, pour simplifier les calculs, x par $t+1$; $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{d^2y}{dx^2}$ deviennent $\frac{dy}{dt}$ et $\frac{d^2y}{dt^2}$; posons ensuite

$$y = 1 + c_1 t + c_2 t^2 + \ldots,$$

nous avons :

$$\begin{aligned} 0 = (t^2+t)(2c_2+\ldots) &+ (2t-1)(c_1+2c_2 t+\ldots) \\ &+ (-2+\beta+2\beta t+\beta t^2)(1+c_1 t+c_2 t^2+\ldots), \end{aligned}$$

et, en égalant à zéro les coefficients des termes en t^0, t^1,

$$\begin{aligned} -c_1 - 2 + \beta &= 0, \\ 2c_2 - 2c_2 + 2c_1 - 2c_1 + c_1\beta + 2\beta &= 0, \end{aligned}$$

équations en c_1 qui ne sont compatibles que si $\beta = 0$.

Ainsi : *Pour que l'équation proposée ait son intégrale générale méromorphe dans tout le plan, il faut et il suffit que* $\alpha = 0$, *et* $\beta = 0$.

On reconnaît sans difficulté que l'intégrale générale est alors rationnelle.

III. — ÉQUATION DE LAMÉ.

C'est l'équation différentielle

$$(1) \qquad \frac{d^2 y}{du^2} = n(n+1)(pu+\lambda)y,$$

où u est la variable indépendante, pu la fonction elliptique classique, λ une constante, n un entier positif.

393. **Théorème**. — *L'intégrale générale de l'équation de Lamé est méromorphe dans tout le plan.*

Les coefficients de l'équation étant des fonctions elliptiques, il suffit évidemment d'établir la proposition à l'intérieur d'un parallélogramme des périodes. Or, dans un tel parallélogramme, pu n'a qu'un pôle, $u=0$, qui est *double*; donc les conditions 1° du n° 388, sont satisfaites.

L'équation déterminante relative au point $u=0$ est, puisque $pu = \frac{1}{u^2} + \alpha_2 u^2 + \ldots,$

$$F(r) = r(r-1) - n(n+1) = 0,$$

ses racines sont $r=-n$, $r=n+1$; elles sont entières et distinctes, c'est-à-dire que les conditions 2° sont satisfaites.

Reste la condition auxiliaire, relative au point $u=0$. Pour reconnaître si elle est vérifiée, il faut substituer à y, dans la proposée (1), le développement

$$y = c_0 u^{-n} + c_1 u^{-n+1} + c_2 u^{-n+2} + \ldots + c_k u^{-n+k} + \ldots \qquad (c_0 = 1).$$

On remplace en même temps pu par son développement autour du pôle $u=0$, à savoir

$$pu = \frac{1}{u^2} + \alpha_2 u^2 + \alpha_4 u^4 + \ldots,$$

qui ne contient que des puissances paires de u.

En égalant les coefficients de u^{-n+k-2} dans les deux membres

de (1), on trouve une équation de la forme

$$(-n+k)(n+k-1)c_k = n(n+1)c_k + c_{k-2}(\ \ ) + c_{k-4}(\ \ ) + \ldots,$$

linéaire et *homogène* par rapport aux c, car on a introduit, pour la symétrie, un premier coefficient c_0.

On l'écrit

$$(2)\qquad c_k F(k-n) = c_{k-2}(\ \ ) + c_{k-4}(\ \ ) + \ldots,$$

tous les coefficients c du second membre *ayant leurs indices respectifs de même parité que* k : cela tient à ce que le développement de pu ne contient que des puissances paires.

Or $F(r)$ ne s'annule que pour $r=-n$ et $r=n+1$; si donc on fait successivement, dans cette équation (2),

$$k = 2,\ 4,\ 6,\ \ldots,\ 2p,\ \ldots,$$

on détermine successivement $c_2, c_4, \ldots, c_{2p}, \ldots$, sans ambiguïté ni impossibilité en fonction de c_0 : en effet, $F(2p-n)$ ne s'annule jamais pour $p \geqq 1$, puisque $2p-n$ ne peut être égal à $n+1$ pour n et p entiers.

Si maintenant, dans (2), on fait $k=1$, il vient

$$c_1 F(1-n) = 0; \qquad \text{d'où} \qquad c_1 = 0.$$

De même $k=3$ donne

$$c_3 F(3-n) + c_1(\ \ ) = 0 \qquad \text{d'où} \qquad c_3 = 0,$$

et ainsi de suite, jusqu'à $k = 2n+1$, qui donne

$$c_{2n+1} F(n+1) + c_{2n-1}(\ \ ) + c_{2n-3}(\ \ ) + \ldots + c_1(\ \ ) = 0,$$

relation vérifiée identiquement, puisque $F(n+1)=0$, et $c_1 = c_3 = \ldots = c_{2n-1} = 0$.

C'est précisément la vérification de cette équation qui constitue la condition auxiliaire; celle-ci est donc satisfaite.

394. Cela étant, on peut trouver *a priori* la forme d'une intégrale (au moins) de l'équation de Lamé; la méthode suivante est due à M. Picard : elle s'applique à toutes les équations différentielles linéaires, à coefficients elliptiques, dont l'intégrale générale est méromorphe dans le plan.

395. Soient y_1 et y_2 deux intégrales distinctes de l'équation de Lamé; si l'on change u en $u+2\omega_1$, $2\omega_1$ étant une période de pu, l'équation de Lamé ne change pas, c'est-à-dire que $y_1(u+2\omega_1)$ et $y_2(u+2\omega_1)$ sont encore des solutions. Par suite :

$$y_1(u+2\omega_1) = \lambda_1 y_1(u) + \lambda_2 y_2(u),$$
$$y_2(u+2\omega_1) = \mu_1 y_1(u) + \mu_2 y_2(u).$$

les λ et μ étant des constantes.

Cherchons s'il existe une solution, $\alpha y_1 + \beta y_2$, qui se reproduise multipliée par un facteur constant lorsqu'on change u en $u+2\omega_1$. Il faut pour cela que l'on ait

$$\alpha y_1(u+2\omega_1) + \beta y_2(u+2\omega_1) = s[\alpha y_1(u) + \beta y_2(u)],$$

s étant une constante.

Remplaçant $y_1(u+2\omega_1)$ et $y_2(u+2\omega_1)$ par leurs valeurs ci-dessus, on a

$$y_1(u)(\alpha\lambda_1 + \beta\mu_1) + y_2(u)(\alpha\lambda_2 + \beta\mu_2) = s[\alpha y_1(u) + \beta y_2(u)].$$

Comme $y_1(u)$ et $y_2(u)$ sont supposés linéairement distincts, la relation précédente ne peut avoir lieu que si les coefficients de y_1 et y_2 sont les mêmes dans les deux membres, ce qui donne

$$(3) \qquad \alpha\lambda_1 + \beta\mu_1 = \alpha s; \qquad \alpha\lambda_2 + \beta\mu_2 = \beta s;$$

et, en éliminant α et β, on obtient l'équation en s :

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 - s & \mu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 - s \end{vmatrix} = 0,$$

qui est du second ordre et qui a deux racines, distinctes ou confondues, mais non infinies, puisque le premier terme est s^2. Soit s_1 une de ces racines; les relations (3) sont compatibles pour $s = s_1$, et donnent des valeurs proportionnelles de α et β; il y a donc *au moins* une solution, $\alpha y_1 + \beta y_2$, qui se reproduit multipliée par s_1 quand l'on change u en $u+2\omega_1$.

Désignons cette solution par $z_1(u)$.

Si $2\omega_2$ est la seconde période de pu, les fonctions $z_1(u+2\omega_2)$, $z_1(u+4\omega_2)$ sont encore des solutions de l'équation de Lamé, comme $z_1(u)$; et par suite il y a entre ces trois solutions une

relation linéaire et homogène

$$z_1(u+4\omega_2) = \alpha_1 z_1(u) + \alpha_2 z_1(u+2\omega_2),$$

α_1 et α_2 étant des constantes.

Dès lors, si l'on pose

$$(4) \qquad \varphi(u) = z_1(u+2\omega_2) + \lambda' z_1(u) \qquad (\lambda' = \text{const.}),$$

$\varphi(u)$ sera une solution de l'équation de Lamé et l'on aura

$$\begin{aligned}\varphi(u+2\omega_2) &= z_1(u+4\omega_2) + \lambda' z_1(u+2\omega_2)\\ &= \alpha_1 z_1(u) + (\lambda'+\alpha_2) z_1(u+2\omega_2)\\ &= (\lambda'+\alpha_2)\left[z_1(u+2\omega_2) + \frac{\alpha_1}{\lambda'+\alpha_2} z_1(u)\right].\end{aligned}$$

Choisissons la constante λ' de manière que $\lambda' = \frac{\alpha_1}{\lambda'+\alpha_2}$, ce qui est toujours possible, au moins d'une manière; il vient

$$\varphi(u+2\omega_2) = \rho_1 \varphi(u),$$

ρ_1 désignant la constante $(\lambda'+\alpha_2)$. D'ailleurs on a, d'après la définition même de $z_1(u)$,

$$z_1(u+2\omega_1) = s_1 z_1(u), \qquad \text{d'où} \qquad z_1(u+2\omega_2+2\omega_1) = s_1 z_1(u+2\omega_2),$$

et par suite en vertu de (4),

$$\varphi(u+2\omega_1) = s_1 \varphi(u).$$

396. Ainsi:

L'équation de Lamé admet toujours au moins une solution particulière, $\varphi(u)$, vérifiant les relations

$$(5) \qquad \begin{cases}\varphi(u+2\omega_1) = s_1 \varphi(u),\\ \varphi(u+2\omega_2) = \rho_1 \varphi(u),\end{cases}$$

ρ_1 et s_1 désignant certaines constantes; cette solution est méromorphe dans tout le plan, puisque l'intégrale générale l'est elle-même [1].

---

[1] L'équation de Lamé ne changeant pas quand on y change u en $-u$, $\varphi(-u)$ est aussi une solution; si donc on peut calculer $\varphi(u)$, on obtiendra ainsi deux solutions, généralement distinctes, de l'équation, et celle-ci sera dès lors intégrée.

397. Il est aisé de trouver la forme générale des fonctions, méromorphes dans tout le plan, qui vérifient les relations (5), sans être assujetties à d'autres conditions.

L'une d'elles est la fonction

$$f(u) = \frac{\sigma(u-h)}{\sigma u} e^{mu},$$

h et m désignant des constantes convenablement choisies. En effet, d'après la formule $\sigma(u + 2\omega_\alpha) = -e^{2\eta_\alpha(u+\omega_\alpha)}\sigma(u)$, on a

$$f(u + 2\omega_1) = f(u)e^{-2\eta_1 h + 2m\omega_1}, \qquad f(u + 2\omega_2) = f(u)e^{-2\eta_2 h + 2m\omega_2},$$

et il suffit de déterminer h et m de manière que l'on ait

$$-2\eta_1 h + 2m\omega_1 = \log s_1, \qquad -2\eta_2 h + 2m\omega_2 = \log\rho_1,$$

ce qui est toujours possible, puisque $\eta_1\omega_2 - \eta_2\omega_1 = \pm\frac{\pi i}{2}$ (n° 232).

Dès lors, si $\varphi(u)$ est la fonction méromorphe la plus générale vérifiant les relations (5), il résulte de ces relations que la fonction $\frac{\varphi(u)}{f(u)}$ ne change pas quand on y remplace u par $u + 2\omega_1$, $u + 2\omega_2$; comme elle est méromorphe dans tout le plan, puisque $\varphi(u)$ et $f(u)$ le sont, c'est donc une *fonction elliptique*, $E(u)$, aux périodes $2\omega_1$, $2\omega_2$, de sorte qu'on a

$$\varphi(u) = \frac{\sigma(u-h)}{\sigma u} e^{mu} E(u). \tag{6}$$

398. Dans le cas où $\varphi(u)$ est une fonction vérifiant, non seulement les relations (5), mais l'équation de Lamé, on peut préciser singulièrement la forme de la fonction elliptique $E(u)$. En effet, l'intégrale *générale* de l'équation de Lamé n'a, dans un parallélogramme, que le seul pôle $u = 0$, qui est d'ordre n, puisque la plus petite racine de l'équation déterminante correspondante est $-n$: donc $\varphi(u)$, solution particulière de l'équation de Lamé, admet le point $u = 0$ comme pôle d'ordre n, *au plus* [1] et n'en

[1] En effet, autour du point $u = 0$, une solution de l'équation de Lamé a un développement de la forme $\frac{1}{u^n} + \frac{c_1}{u^{n+1}} + \ldots$; une autre a un développement de la forme $u^{n+1} + c'_1 u^{n+2} + \ldots$: car les racines de l'équation déterminante sont $-n$

n pas d'autre. Il en résulte immédiatement, d'après (6), que $E(u)$ admet ce même point comme pôle d'ordre $n-1$, *au plus*, et ne peut admettre d'autre pôle, sauf peut-être $u=h$, comme pôle simple.

Donc, en exprimant $E(u)$ par les σ (n° 188), on a

$$E(u)=\frac{\sigma(u-a_1)\sigma(u-a_2)\ldots\sigma(u-a_n)}{\sigma^{n-1}(u)\sigma(u-h)},$$

une ou plusieurs des constantes, $a_1, \ldots, a_n$, pouvant être o ou h, et $a_1+a_2+\ldots+a_n$ étant égal à $h+$ Période. On a ainsi

$$\varphi(u)=e^{mu}\frac{\sigma(u-a_1)\sigma(u-a_2)\ldots\sigma(u-a_n)}{\sigma^n u},$$

et il est *certain* que l'équation de Lamé admet une solution particulière de cette forme. Il ne reste qu'à substituer $\varphi(u)$ dans cette équation, et à déterminer $m, a_1, a_2, \ldots, a_n$, en donnant à u des valeurs particulières, ou par toute autre méthode. La solution $\varphi(u)$ étant ainsi connue, $\varphi(-u)$ sera une seconde solution, comme on l'a observé plus haut; et l'intégrale générale de l'équation de Lamé sera $y=c_1\varphi(u)+c_2\varphi(-u)$.

399. Intégration de l'équation de Lamé pour $n=1$. — L'équation de Lamé est alors

$$\frac{d^2y}{du^2}=2(pu+\lambda)y. \tag{7}$$

On a dans ce cas :

$$\varphi(u)=e^{mu}\frac{\sigma(u-a)}{\sigma u},$$

d'où l'on tire

$$\frac{\varphi'(u)}{\varphi(u)}=m+\zeta(u-a)-\zeta u,$$

---

et $n+1$. Pour une solution quelconque, on a donc le développement

$$\lambda'\left(\frac{1}{u^n}+\frac{c_1}{u^{n+1}}+\ldots\right)+\mu'(u^{n+1}+c'_1u^{n+2}+\ldots) \qquad (\lambda' \text{ et } \mu'=\text{const. arbitraires}),$$

et l'on voit que si $\lambda'\gtrless 0$, $u=0$ est un pôle d'ordre n pour cette solution; si $\lambda'=0$, c'est un zéro d'ordre $n+1$.

et, en dérivant,

$$\frac{\varphi''(u)}{\varphi(u)} - \left[\frac{\varphi'(u)}{\varphi(u)}\right]^2 = -p(u-a) + pu,$$

ou

$$\frac{\varphi''(u)}{\varphi(u)} = [m + \zeta(u-a) - \zeta u]^2 - p(u-a) + pu.$$

Il faut écrire que $\varphi(u)$ vérifie l'équation (7) de Lamé, à savoir $\frac{\varphi''(u)}{\varphi(u)} = 2(pu + \lambda)$, ce qui donne

$$[m + \zeta(u-a) - \zeta u]^2 - p(u-a) - pu - 2\lambda = 0.$$

Il s'agit de déterminer les constantes a, b, m de manière que cette équation soit satisfaite quel que soit u, et l'*on est certain,* a priori, *que cela est possible.*

En employant la formule $\zeta(u - v)$ du n° 197, on écrit la relation précédente

$$\left(m - \zeta a + \frac{1}{2}\frac{p'u + p'a}{pu - pa}\right)^2 - [p(u-a) + pu + pa] + pa - 2\lambda = 0,$$

ou, d'après la formule qui donne $p(u \pm v)$ (n° 198),

$$\left(m - \zeta a + \frac{1}{2}\frac{p'u + p'a}{pu - pa}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{p'u + p'a}{pu - pa}\right)^2 + pa - 2\lambda = 0.$$

Développons le premier carré et réduisons, nous avons

$$(8) \qquad (m - \zeta a)^2 + (m - \zeta a)\left(\frac{p'u + p'a}{pu - pa}\right) + pa - 2\lambda = 0.$$

Le premier membre, qui doit être nul identiquement, est une fonction rationnelle de pu et $p'u$, qu'on peut mettre sous la forme $M(pu) + p'u\, N(pu)$, M et N étant rationnels en pu. Pour qu'une telle fonction soit nulle identiquement, il faut et il suffit que M et N soient nuls identiquement : sinon on aurait

$$p'u = -\frac{M(pu)}{N(pu)},$$

quel que soit u, ce qui est impossible, car le second membre est une fonction monodrome *paire* de u, et le premier, $p'u$, est une fonction *impaire*. On a donc d'abord $N = 0$, c'est-à-dire $m = \zeta a$: il reste ensuite, dans (8), $2\lambda = pa$.

Si donc a est une solution quelconque de l'équation $\wp a = 2\lambda$, l'équation (7) de Lamé aura comme intégrale la fonction

$$e^{u\zeta a}\frac{\sigma(u-a)}{\sigma u};$$

une autre intégrale s'obtiendra par le changement de a en $-a$, puisque $\wp(-a) = \wp a$, et sera

$$e^{-u\zeta a}\frac{\sigma(u+a)}{\sigma u};$$

elle se déduit d'ailleurs de la précédente par le changement de u en $-u$.

L'intégrale générale de la proposée (7) sera dès lors

$$y = c_1 e^{u\zeta a}\frac{\sigma(u-a)}{\sigma u} + c_2 e^{-u\zeta a}\frac{\sigma(u+a)}{\sigma u}.$$

CHAPITRE VI.

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES.

I. — GÉNÉRALITÉS.

400. On nomme équation aux dérivées partielles une relation entre une fonction, z, de plusieurs variables indépendantes, ces variables $x, y, \ldots$, et les dérivées partielles des divers ordres de z par rapport à $x, y, \ldots$. L'équation est d'ordre n si la dérivée partielle de l'ordre le plus élevé qui y figure est elle-même d'ordre n. Ainsi l'équation

$$f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right) = 0$$

est du second ordre.

401. L'intégrale générale d'une équation différentielle ordinaire d'ordre n contient n constantes arbitraires; de même l'intégrale générale d'une équation aux dérivées partielles d'ordre n contient n *fonctions arbitraires*. On peut s'en rendre compte comme il suit, en se bornant à l'équation du premier ordre, à deux variables indépendantes.

Soit l'équation

$$f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0;$$

résolvons-la par rapport à l'une des dérivées partielles :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \varphi\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial y}\right). \tag{1}$$

Je dis que l'équation (1) admettra une solution z, qui, pour $x = 0$, se réduira à une fonction *arbitraire* de y, $\psi(y)$. En effet, en développant z par la formule de Maclaurin, suivant les

puissances croissantes de x, on aura

$$(2)\quad z(x,y) = z(0,y) + x\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{x=0} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\left(\frac{\partial^n z}{\partial x^n}\right)_{x=0} + \ldots$$

Or l'équation différentielle (1) permet de calculer la valeur, pour $x = 0$, de tous les coefficients de ce développement.

Le premier terme en effet, $z(0,y)$, est égal, d'après l'hypothèse, à $\psi(y)$:

$$z(0,y) = \psi(y).$$

Or je dis que si l'on connaît les n premiers coefficients

$$z(0,y),\quad \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{x=0},\quad \left(\frac{\partial^{n-1} z}{\partial x^{n-1}}\right)_{x=0},$$

on pourra calculer le suivant, c'est-à-dire $\left(\frac{\partial^n z}{\partial x^n}\right)_{x=0}$. En effet, l'équation proposée (1), dérivée $(n-1)$ fois par rapport à x, donne

$$(3)\quad \frac{\partial^n z}{\partial x^n} = \text{fonct. de}\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^{n-1} z}{\partial x^{n-1}}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}, \ldots, \frac{\partial^n z}{\partial y\,\partial x^{n-1}}\right).$$

Faisons dans cette relation $x = 0$: les valeurs de

$$z(0,y),\quad \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{x=0},\quad \ldots,\quad \left(\frac{\partial^{n-1} z}{\partial x^{n-1}}\right)_{x=0}$$

sont des fonctions de y supposées connues ; soit

$$\left(\frac{\partial^h z}{\partial x^h}\right)_{x=0} = \varphi_h(y); \qquad (h = 0, 1, 2, \ldots, n-1);$$

on en déduit, en dérivant par rapport à y,

$$\left(\frac{\partial^{h+1} z}{\partial y\,\partial x^h}\right)_{x=0} = \varphi'_h(y),$$

et par suite, toutes les quantités qui figurent dans le second membre de (3), où l'on fait $x = 0$, sont connues, ce qui donne la valeur cherchée de $\left(\frac{\partial^n z}{\partial x^n}\right)_{x=0}$.

Le premier terme du développement (2) étant connu, on pourra ainsi, de proche en proche, calculer tous les autres, et ce développement donnera une fonction z, de x, y, satisfaisant à l'équation proposée (1), et prenant, pour $x = 0$, la valeur $\psi(y)$.

Il resterait à démontrer que le développement est convergent, ce qui a été établi par Cauchy : admettant cette convergence sous certaines conditions, on voit que la solution z obtenue contient, dans son expression, la *fonction arbitraire* $\psi(y)$.

402. Remarque. — *Géométriquement,* cette proposition s'énonce ainsi : l'équation différentielle

$$f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0$$

admet une solution, $z = \varphi(x, y)$, telle que la surface représentée par l'équation

$$z - \varphi(x, y) = 0$$

passe par une courbe donnée, $z = \psi(y)$, du plan $x = 0$.

403. *Plus généralement,* on peut dire que l'équation différentielle admet une solution, $z = \varphi_1(x, y)$, telle que la surface $z - \varphi_1(x, y) = 0$ passe une courbe donnée de l'espace.

Soient en effet

$$x = F(y), \qquad z = \psi(y),$$

les équations de cette courbe; prenons pour variables indépendantes, à la place de x et de y, les quantités ξ et η définies par

$$\xi = x - F(y)) \qquad \eta = y.$$

Nous aurons

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial \xi}, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} = -\frac{\partial z}{\partial \xi}F'(y) + \frac{\partial z}{\partial \eta}. \end{aligned}\right.$$

L'équation différentielle proposée deviendra, si l'on y remplace $x, y, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$, par leurs valeurs ci-dessus,

$$f_1\left(\xi, \eta, z, \frac{\partial z}{\partial \xi}, \frac{\partial z}{\partial \eta}\right) = 0;$$

elle est toujours du premier ordre; elle admet donc une solution $z = \varphi(\xi, \eta)$, telle que la surface $z - \varphi(\xi, \eta) = 0$ passe par la courbe $\xi = 0$, $z = \psi(\eta)$; ce qui revient à dire que l'équation

différentielle primitive admet une solution, $z = \varphi[x - F(y), y]$, telle que la surface correspondante, $z - \varphi = 0$, passe par la courbe $x = F(y)$, $z = \psi(y)$.

404. Le raisonnement du n° **401** s'étend à une équation d'ordre quelconque; par exemple, étant donnée une équation du second ordre, à deux variables indépendantes,

$$(4) \qquad f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = 0,$$

on pourra trouver une solution, z, telle que, pour $x = 0$, on ait

$$(5) \qquad \begin{cases} (z)_{x=0} = \psi(y), \\ \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{x=0} = \psi_1(y), \end{cases}$$

ψ et ψ_1 étant *deux fonctions arbitrairement choisies de y*.

Géométriquement, cela signifie que l'équation (4) admet une surface intégrale, $z = \varphi(x, y)$, passant par une courbe donnée $z = \psi(y)$, du plan $x = 0$, et ayant, en chaque point de cette courbe, un plan tangent déterminé : car le plan tangent en un point est déterminé si l'on connaît les valeurs de $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$ en ce point; or la seconde équation (5) fait connaître $\frac{\partial z}{\partial x}$ tout le long de la courbe considérée, et la première équation (5), dérivée par rapport à y, donne de même $\frac{\partial z}{\partial y}$.

405. Plus généralement, on verrait, comme au n° **403**, que l'équation (4) admet une solution $z = \varphi(x, y)$, telle que la surface intégrale correspondante, $z - \varphi(x, y) = 0$, passe par une courbe C de l'espace arbitrairement choisie, et touche tout le long de cette courbe une surface donnée quelconque, passant également par C.

406. Nous allons maintenant indiquer les procédés connus pour intégrer les équations aux dérivées partielles, ou plutôt *pour les ramener à des systèmes d'équations différentielles ordinaires* (à une seule variable); nous nous bornerons au cas des équations du *premier ordre,* et même, dans le champ ainsi

restreint, à des cas particuliers : 1° celui des équations linéaires par rapport aux dérivées partielles de la fonction inconnue ; 2° celui des équations à deux variables indépendantes :

$$f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0.$$

II. — ÉQUATIONS LINÉAIRES DU PREMIER ORDRE AUX DÉRIVÉES PARTIELLES.

1° *Équations linéaires et homogènes.*

407. Considérons d'abord l'équation, linéaire et homogène par rapport aux dérivées,

$$X_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + \ldots + X_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = 0, \tag{1}$$

entre les dérivées d'une fonction inconnue z, et les n variables indépendantes, x_1, x_2, ..., x_n. On suppose essentiellement que X_1, X_2, ..., X_n sont des fonctions de x_1, x_2, ..., x_n seuls, c'est-à-dire ne *contiennent pas l'inconnue* z.

408. Solution. — Pour intégrer l'équation (1) on intégrera le *système auxiliaire d'équations différentielles ordinaires*, d'ordre $n-1$,

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n}. \tag{2}$$

Son intégrale générale renfermera $(n-1)$ constantes arbitraires, c'est-à-dire que, entre x_1, ..., x_n, il y aura $(n-1)$ relations contenant les $(n-1)$ constantes c_1, c_2, ..., c_{n-1}. Résolvant ces relations par rapport aux constantes, on aura

$$\left\{\begin{array}{l} c_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_{n-1} = \varphi_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n), \end{array}\right. \tag{3}$$

les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$ étant, (n° 329), $(n-1)$ *intégrales premières* distinctes du système (2).

Cela posé, *la solution générale de l'équation aux dérivées partielles* (1) *est*

$$z = f(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}),$$

f étant une fonction arbitraire; et *toutes les solutions sont comprises dans cette formule.*

Démonstration. — Je dis d'abord que les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$, et plus généralement une intégrale première quelconque, φ, du système (2), sont des solutions de l'équation (1). En effet, si l'on a, pour les valeurs de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ qui satisfont au système (2), la relation

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c,$$

on aura, en différentiant,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial\varphi}{\partial x_n} dx_n = 0,$$

équation qui a lieu pour les mêmes valeurs de $x_1, x_2, \ldots, x_n$; en y remplaçant $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ par leurs valeurs proportionnelles tirées de (2), on a

$$(4) \qquad X_1 \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + \ldots + X_n \frac{\partial\varphi}{\partial x_n} = 0.$$

Cette équation (4) a encore lieu pour toutes les valeurs de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vérifiant le système (2); elle est satisfaite, en particulier, pour les valeurs initiales, *lesquelles sont arbitraires* (n° 324) : elle a donc lieu quels que soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$, c'est-à-dire que $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est une solution de l'équation proposée (1).

Cela posé, il est aisé de trouver la solution la plus générale de cette équation (1).

Observons à cet effet, qu'une au moins des fonctions $X_1, \ldots X_n$ n'est pas nulle; soit par exemple $X_n \gtrless 0$. Prenons alors pour variables indépendantes à la place de $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$ les

fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$, et x_n [1]; la solution générale cherchée, z, sera de la forme

$$z = F(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}, x_n).$$

Écrivons qu'elle vérifie (1), et à cet effet formons $\frac{\partial z}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n}$. On a

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = \frac{\partial F}{\partial \varphi_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial F}{\partial \varphi_{n-1}}\frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x_1},$$
$$\frac{\partial z}{\partial x_2} = \frac{\partial F}{\partial \varphi_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial F}{\partial \varphi_{n-1}}\frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x_2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\frac{\partial z}{\partial x_n} = \frac{\partial F}{\partial \varphi_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} + \ldots + \frac{\partial F}{\partial \varphi_{n-1}}\frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x_n} + \frac{\partial F}{\partial x_n},$$

$\frac{\partial F}{\partial x_n}$ étant la dérivée partielle de F par rapport à x_n, en tant que cette variable figure *explicitement* dans F. Portant ces valeurs dans (1), on obtient, en tenant compte des équations telles que (4) qui expriment que $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$ sont des solutions de (1),

$$X_n \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0;$$

d'où, puisque X_n n'est pas nul, $\frac{\partial F}{\partial x_n} = 0$. Ainsi, il faut et il suffit que la fonction $F(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}, x_n)$ ne contienne pas *explicitement* x_n, c'est-à-dire soit une fonction de $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$, et l'on a dès lors, pour la solution *la plus générale* de la proposée (1),

$$z = F(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}),$$

F étant une fonction d'ailleurs arbitraire.

L'intégration de l'équation (4) est ainsi ramenée à celle du système (2); on voit que la solution la plus générale de (1) est donnée par l'intégrale première la plus générale de (2), et que l'intégration de l'équation (1) et celle du système (2) sont deux problèmes absolument équivalents.

---

[1] Ainsi, nous prenons pour variables *indépendantes* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$ et x_n: ce changement de variables est possible, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de relation entre $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$ et x_n. Car : 1° il n'y a pas de relation entre $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$, intégrales premières d'un système différentiel canonique d'ordre $(n-1)$ (n° 329); 2° il n'y a pas de relation de la forme $x_n =$ fonct. de $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1})$, car une telle relation exprimerait que $x_n =$ const. est une intégrale première du système (2), ce qui entraînerait, dans (2), $dx_n = 0$, et par suite $X_n = 0$, hypothèse écartée.

409. Exemple. — Soit l'équation

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0,$$

qui rentre bien dans le type (1). Le système auxiliaire (2) est

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y},$$

et l'intégration donne

$$y=c_1x;\qquad \text{d'où}\qquad c_1=\frac{y}{x}.$$

La solution la plus générale de la proposée est donc

$$z=F\left(\frac{y}{x}\right),$$

F étant une fonction arbitraire.

2° *Équations linéaires à second membre.*

410. Soit maintenant l'équation

$$(5)\qquad X_1\frac{\partial z}{\partial x_1}+X_2\frac{\partial z}{\partial x_2}+\ldots+X_n\frac{\partial z}{\partial x_n}=Z,$$

où non seulement il y a un second membre, Z, mais où les X_1, X_2, ..., X_n et Z sont des fonctions des variables indépendantes, x_1, ..., x_n, et de la fonction inconnue z.

Supposons que l'inconnue z soit définie par une équation implicite

$$(6)\qquad \Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)=0,$$

et cherchons à déterminer la fonction Φ de telle sorte que z vérifie la proposée (5). On tire de (6), en dérivant successivement par rapport à chacune des variables indépendantes x_1, x_2, ..., x_n,

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}+\frac{\partial\Phi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_1}=0,$$
$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_2}+\frac{\partial\Phi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_2}=0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

équations qui donnent $\frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \ldots,$ sous la forme

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} : \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \qquad \ldots.$$

Portons ces valeurs dans (5), nous avons

$$(7) \qquad X_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + \ldots + X_n \frac{\partial \Phi}{\partial x_n} + Z \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0,$$

équation aux dérivées partielles à laquelle doit satisfaire la fonction Φ. Pour que la fonction z, définie par $\Phi(x_1, \ldots, x_{n-1}, z) = 0$, soit une solution de la proposée (5), il n'est pas nécessaire que l'équation (7) ait lieu *identiquement,* c'est-à-dire quels que soient $x_1, x_2, \ldots, x_n, z$; il suffit qu'elle ait lieu pour les valeurs de $x_1, \ldots, x_n, z$ qui vérifient $\Phi(x_1, \ldots, x_n, z) = 0$. Si donc nous déterminons Φ en regardant l'équation (7) comme ayant lieu identiquement, nous obtiendrons ainsi des solutions, z, de l'équation proposée, mais nous ne serons pas sûrs d'obtenir *toutes* les solutions. Suivons néanmoins cette marche.

L'équation (7), quand on la suppose vérifiée quels que soient $x_1, x_2, \ldots, x_n, z$, est une équation aux dérivées partielles en Φ, les variables indépendantes étant $x_1, \ldots, x_n, z$; elle est du type que nous savons intégrer (nos 408 et 409). On considère à cet effet le système auxiliaire de n équations :

$$(8) \qquad \frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n} = \frac{dz}{Z},$$

que l'on intègre sous la forme

$$\varphi_1(x_1, \ldots, x_n, z) = c_1, \qquad \varphi_2 = c_2, \qquad \ldots, \qquad \varphi_n = c_n,$$

et l'on obtient la solution générale de (7) par la formule

$$\Phi = f(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n),$$

f étant une fonction arbitraire. Donc une solution, z, de l'équation proposée (5), sera définie par la relation implicite

$$(9) \qquad f(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n) = 0.$$

411. *A priori,* d'après ce qui a été dit plus haut, on ne doit pas s'attendre à avoir ainsi la solution la plus générale : mais on

peut établir que la solution (9) ne laisse échapper que des solutions exceptionnelles, ne *renfermant pas de constante arbitraire*.

Soit en effet $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) = c$ une solution de la proposée (5) dépendant d'une constante arbitraire, c [1]; en tirant de cette relation $\frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \cdots$ comme on l'a fait plus haut, et portant dans (5), on retombe sur l'équation (7), à savoir

$$(7) \qquad X_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \ldots + X_n \frac{\partial \Phi}{\partial x_n} + Z \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0,$$

équation où c ne figure pas explicitement, et qui doit avoir lieu pour les valeurs de $x_1, x_2, \ldots, x_n, z$ vérifiant la relation

$$\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) = c.$$

Or, c étant une constante *arbitraire*, cette dernière relation est vérifiée par des valeurs initiales *simultanément arbitraires* de $x_1, \ldots. x_n, z$, c'est-à-dire que (7) doit avoir lieu *identiquement*, quels que soient $x_1, \ldots, x_n, z$.

Par suite, en vertu de ce qui précède, Φ est une fonction de $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, et dès lors la solution $\Phi(x_1, \ldots, x_n, z) = c$ est comprise dans la solution (9) :

$$f(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n) = 0,$$

où f est une *fonction arbitraire*.

Donc, comme nous l'avons annoncé, s'il existe d'autres solutions que la solution (9), ce sont des solutions ne renfermant pas de constante arbitraire, qu'on nomme *solutions singulières*.

412. Règle. — Voici donc l'énoncé de la règle d'intégration qui comprend, comme cas particulier, celle du n° **408** :

Soit l'équation

$$(5) \qquad X_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + \ldots + X_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = Z,$$

où z est l'inconnue, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les variables indépendantes,

---

[1] On suppose l'équation entre $x_1, x_2, \ldots, x_n, z$ et c résolue par rapport à la constante c, ce qui ne diminue pas la généralité.

et $X_1, X_2, \ldots, Z$ *des fonctions de* $x_1, x_2, \ldots, x_n, z$. *Pour l'intégrer, on intégrera le système auxiliaire d'équations différentielles ordinaires (d'ordre n) :*

$$(8) \qquad \frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n} = \frac{dz}{Z},$$

ce qui donnera n relations qu'on résoudra par rapport aux n constantes arbitraires :

$$c_1 = \varphi_1(x_1, \ldots, x_n, z), \qquad c_2 = \varphi_2, \qquad \ldots, \qquad c_n = \varphi_n.$$

La solution générale z de l'équation proposée sera donnée par la relation implicite

$$f(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n) = 0,$$

f étant une fonction arbitraire : mais certaines solutions (singulières, ne renfermant pas de constante arbitraire) pourront échapper à cette formule.

413. **Exemples.** — 1° *Équation des cylindres.* — C'est l'équation aux dérivées partielles (Tome I, n° 120)

$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = 1, \qquad (a \text{ et } b = \text{const.}).$$

Le système auxiliaire (8) est ici

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = \frac{dz}{1},$$

d'où l'on tire

$$x - az = c_1, \qquad y - bz = c_2,$$

et la solution générale de la proposée est donnée par

$$f(x - az, y - bz) = 0,$$

f étant une fonction arbitraire. Cette équation représente un cylindre dont les génératrices sont parallèles à la direction a, b, 1.

2° *Équation des fonctions homogènes.* — Soit à intégrer l'équation

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = mz.$$

Le système auxiliaire (8) est ici

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{mz}, \tag{8 bis}$$

d'où l'on tire

$$y = c_1 x, \qquad c_1 = \frac{y}{x},$$

ou

$$z = c_2 x^m \qquad c_2 = \frac{z}{x^m}.$$

L'intégrale générale de la proposée est donc

$$f\left(\frac{z}{x^m}, \frac{y}{x}\right) = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{z}{x^m} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

φ étant une fonction arbitraire. L'inconnue z est donc une fonction *homogène* quelconque de x et y, d'ordre m.

3° *Équation des surfaces de révolution.* — Soit à intégrer

$$ay - bx + \frac{\partial z}{\partial x}(cy - bz) + \frac{\partial z}{\partial y}(az - cx) = 0.$$

Le système auxiliaire (8) est

$$\frac{dx}{cy - bz} = \frac{dy}{az - cx} = \frac{dz}{bx - ay}. \tag{8 ter}$$

On en tire

$$a\,dx + b\,dy + c\,dz = 0,$$
$$x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0,$$

relations qui s'intègrent de suite et donnent

$$c_1 = ax + by + cz,$$
$$c_2 = x^2 + y^2 + z^2;$$

c'est l'intégrale générale du système différentiel (8 *ter*). La solution de la proposée est donc fournie par l'équation implicite

$$f(ax + by + cz,\ x^2 + y^2 + z^2) = 0,$$

qui représente une surface de révolution autour de la droite

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}.$$

4° *Soit à intégrer l'équation*

$$\frac{\partial z}{\partial x} + z\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Le système auxiliaire est

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{z} = \frac{dz}{0}.$$

Le dernier rapport entraîne $dz = 0$, d'où

$$c_1 = z.$$

Portant cette valeur de z dans

$$dx = \frac{dy}{z},$$

on en conclut

$$y = c_1 x + c_2,$$

d'où

$$c_1 = z, \qquad c_2 = y - zx,$$

et l'intégrale générale de la proposée est donnée par l'équation

$$f(z, y - zx) = 0,$$

f étant une fonction arbitraire.

414. Interprétation géométrique de la méthode d'intégration. — Soit l'équation différentielle à deux variables indépendantes, x et y,

$$(10) \qquad \mathrm{P}\frac{\partial z}{\partial x} + \mathrm{Q}\frac{\partial z}{\partial y} = \mathrm{R},$$

qui est l'équation (5) dans le cas de $n = 2$: P, Q, R sont des fonctions de x, y, z.

Considérons la droite D qui a pour équations

$$(\mathrm{D}) \qquad \frac{\mathrm{X} - x}{\mathrm{P}} = \frac{\mathrm{Y} - y}{\mathrm{Q}} = \frac{\mathrm{Z} - z}{\mathrm{R}};$$

à chaque point x, y, z de l'espace correspond ainsi une droite D, passant par ce point.

Soit $z = \varphi(x, y)$ une intégrale de l'équation (10) : *cette équation* (10) *exprime que le plan tangent à la surface*

$$z - \varphi(x, y) = 0,$$

au point (x, y, z), *contient la droite* D *relative à ce point,* car ce plan tangent est

$$(X - x)\frac{\partial z}{\partial x} + (Y - y)\frac{\partial z}{\partial y} - (Z - z) = 0.$$

Cela posé, appelons *courbe caractéristique* une courbe qui, en chacun de ses points x, y, z, admet pour tangente la droite D correspondant à ce point : les courbes caractéristiques seront définies analytiquement par le système différentiel

$$\text{(C)} \qquad \frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R},$$

dont l'intégrale générale, qui renferme deux constantes arbitraires, est de la forme

$$\text{(11)} \qquad c_1 = \varphi_1(x, y, z), \qquad c_2 = \varphi_2(x, y, z).$$

Ces deux équations (11) sont celles des courbes caractéristiques; celles-ci sont en nombre doublement infini [1].

Or toute surface engendrée par des caractéristiques, associées suivant une loi quelconque, est une intégrale de l'équation proposée (10) : car, en chaque point (x, y, z) de cette surface, le plan tangent contient la tangente à la caractéristique qui passe en x, y, z, c'est-à-dire la droite D relative à ce point.

Réciproquement, sur toute surface intégrale de l'équation (10), il y a une infinité de caractéristiques. En effet, on peut tracer sur une surface quelconque, S, une série simplement infinie de lignes définies par la condition de toucher, en tout point de S, une droite déterminée située dans le plan tangent : ainsi les lignes de courbure sont celles qui touchent, en chaque point, un des axes de l'indicatrice. Or, pour une surface intégrale de (10), en tout point M, la droite D relative à M est dans le plan tangent, puisque l'équation (10) exprime précisément cette propriété : on en conclut qu'il y a bien, sur la surface, une série simplement infinie de

---

[1] Les équations (11) donnent la solution *générale* du système différentiel (C); elles ne donnent pas *toutes* les solutions. Les solutions singulières du système, s'il en existe, ne sont pas nécessairement comprises dans les formules (11).

lignes touchant, en chacun de leurs points, la droite D correspondante, c'est-à-dire une série de *caractéristiques* [1].

L'intégrale générale de (10) est donc une surface quelconque, engendrée par les caractéristiques : or, pour que la caractéristique (11),

$$c_1 = \varphi_1(x, y, z), \qquad c_2 = \varphi_2(x, y, z),$$

engendre une surface, il suffit d'établir une relation, quelconque d'ailleurs, entre c_1 et c_2,

$$f(c_1, c_2) = 0,$$

de sorte que les surfaces intégrales cherchées sont données par l'équation

$$f(\varphi_1, \varphi_2) = 0,$$

f étant une fonction arbitraire. On retrouve ainsi, par une voie géométrique, les résultats analytiques du n° **412**.

415. Remarque. — Si l'on veut trouver la surface intégrale qui contient une courbe donnée, on prendra les caractéristiques qui passent par les divers points de cette courbe : leur lieu sera la surface cherchée. De même, on obtiendra une surface intégrale circonscrite à une surface donnée en prenant les caractéristiques qui touchent cette surface.

416. Exemples. — 1° Dans l'intégration de l'équation aux dérivées partielles des surfaces de révolution, on a trouvé pour les caractéristiques

$$c_1 = ax + by + cz, \qquad c_2 = x^2 + y^2 + z^2;$$

les caractéristiques sont donc des cercles, situés dans des plans

---

[1] Ce raisonnement peut souffrir des exceptions. En effet, les courbes qui touchent en chacun de leurs points la droite D correspondante ne sont pas nécessairement des caractéristiques, parce que le système différentiel (C) peut admettre comme solutions (*singulières*) d'autres courbes que les caractéristiques. Mais si de telles courbes existent, elle ne peuvent dépendre que *d'une* constante arbitraire, au plus, puisqu'elles ne constituent pas la solution *générale* du système (C); elles ne peuvent dès lors engendrer *qu'une seule* surface, dont l'équation ne renferme *aucune* constante arbitraire. Cette surface est d'ailleurs, quand elle existe, une solution singulière de l'équation proposée (10); on démontre qu'elle est l'enveloppe des caractéristiques.

perpendiculaires à l'axe $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$, et ayant leurs centres sur cet axe (parallèles).

2° *Déterminer une surface telle que le plan tangent en un quelconque de ses points,* M, *rencontre* Oz *en un point qui soit équidistant du point* M *et de l'origine.*

Le plan tangent en M, (x, y, z), étant

$$Z - z = \frac{\partial z}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial z}{\partial y}(Y - y),$$

l'équation du problème est

$$x^2 + y^2 + \left(x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(z - x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2,$$

ou, après réductions,

$$(12) \qquad 2x\frac{\partial z}{\partial x} + 2y\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z^2 - x^2 - y^2}{z}.$$

C'est une équation linéaire par rapport à $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$, qu'on intégrerait aisément par la méthode analytique générale; il sera plus intéressant de l'intégrer géométriquement.

Soit M un point quelconque d'une surface intégrale; désignons par T le point de Oz équidistant de M et de O (*fig.* 90) : le plan

Fig. 90.

tangent à la surface intégrale en M doit passer par T, c'est-à-dire contenir la droite MT. C'est là la condition nécessaire et suffisante que doivent vérifier les surfaces intégrales; c'est celle qu'exprimerait analytiquement l'équation (12).

Il en résulte que MT est la droite D qui correspond au point M.

Cherchons maintenant les caractéristiques, c'est-à-dire les courbes qui admettent pour tangente, en un point quelconque M, la droite D (c'est-à-dire MT) relative à ce point. L'égalité $TO = TM$ montre que la droite MT est tangente, en M, au cercle qui passe par M et qui touche Oz au point O; par suite les cercles (en nombre doublement infini) qui passent par l'origine O et touchent en ce point l'axe Oz sont les caractéristiques.

La surface intégrale est donc une surface quelconque engendrée par des cercles touchant Oz en O; un tel cercle est situé : 1° dans un plan mené par Oz; 2° sur une sphère passant par l'origine O, et touchant en ce point un plan arbitrairement choisi mené par Oz, le plan $x = 0$, par exemple. Les caractéristiques ont donc pour équations

$$y = c_1 x, \qquad x^2 + y^2 + z^2 = c_2 x,$$

d'où, pour l'équation d'une surface engendrée par ces lignes,

$$f\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{x}, \frac{y}{x}\right) = 0,$$

ou

$$x^2+y^2+z^2 = x\psi\left(\frac{y}{x}\right), \qquad \text{et} \qquad z = \sqrt{-x^2-y^2+x\psi\left(\frac{y}{x}\right)},$$

ψ étant une fonction arbitraire. On a ainsi trouvé les surfaces cherchées sans même se servir de l'équation (12) qui les définit analytiquement. En intégrant celle-ci on arriverait aux mêmes résultats.

III. — ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENTIELLES TOTALES.

---

417. Généralités. — Les équations (linéaires) aux différentielles totales sont du type

$$dz = X(x, y, z)\,dx + Y(x, y, z)\,dy, \tag{1}$$

où X et Y sont des fonctions données de x, y, z. Existe-t-il une fonction $z(x, y)$, de x et y, telle que, si l'on forme dz, c'est-à-dire

$$\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy,$$

cette différentielle soit identique au second membre de (1), où l'on a remplacé z par $z(x, y)$? Évidemment il faut et il suffit pour cela que la fonction $z(x, y)$ vérifie les *deux* équations différentielles

$$(2) \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = X(x, y, z), \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = Y(x, y, z).$$

Le problème de chercher, si elles existent, les solutions z de l'équation (1), revient donc à chercher les solutions z communes aux deux équations aux dérivées partielles (2).

Pour reconnaître si le *système* (2) admet une solution z, dérivons la première équation (2) par rapport à y, la seconde par rapport à x. Nous trouvons, en tenant compte des équations (2) elles-mêmes,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial X}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial X}{\partial z}Y,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x} = \frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial z}X.$$

Si la fonction z existe, on aura donc

$$(3) \qquad \frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial X}{\partial z}Y = \frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial z}X,$$

égalité qui doit avoir lieu quand on remplace, dans les deux membres, z par la fonction $z(x, y)$, solution du système (2). Deux cas sont alors possibles : 1° la relation (3) est une identité en x, y, z; 2° dans le cas contraire elle définit une fonction z, de x et y, qui ne renferme pas de constante arbitraire, et qui *seule* peut satisfaire au système (2) : il suffira d'examiner si elle y satisfait effectivement, et, suivant le résultat du calcul, le système (2) aura ou n'aura pas de solution.

Par suite, le système (2) ne *pourra* admettre de solution, $z(x, y)$, dépendant d'une constante arbitraire, que si l'équation (3), que nous appellerons la *condition d'intégrabilité,* est satisfaite identiquement. Si elle ne l'est pas, il est *possible* qu'il existe une solution, sans constante arbitraire, qu'on obtiendra comme il vient d'être dit.

418. Intégration. — Supposons donc la condition d'intégrabi-

lité (3) satisfaite identiquement, quels que soient x, y, z; je dis que le système (2) admet une solution, et que celle-ci renferme une constante arbitraire.

Considérons, en effet, la première équation (2),

$$\frac{\partial z}{\partial x} = X(x, y, z).$$

C'est une équation aux dérivées partielles, linéaire en $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$, et à second membre; son intégrale générale s'obtient (n° 412), par l'intégration du système auxiliaire

$$(4) \qquad \frac{dx}{1} = \frac{dy}{0} = \frac{dz}{X}, \qquad \text{ou} \qquad \frac{dy}{dx} = 0, \qquad \frac{dz}{dx} = X(x, y, z),$$

dont une intégrale première est $y = C_1$. Soit $f(x, y, z) = C_2$ une autre intégrale première; l'intégrale générale, z, de l'équation $\frac{\partial z}{\partial x} = X$ sera donnée (n° 412) par la relation

$$(5) \qquad f(x, y, z) = \Phi(y),$$

Φ désignant une fonction arbitraire. Observons, avant d'aller plus loin, que la fonction $f(x, y, z)$, intégrale première du système (4), vérifie (n° 408), *quels que soient* x, y, z, la relation

$$(6) \qquad \frac{\partial f}{\partial x} + X\frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Cela posé, la question de reconnaître si les deux équations (2) sont satisfaites par une même fonction z revient à examiner si la fonction z, définie par (5), et qui est la solution générale de la première des équations (2), peut aussi vérifier la seconde, à savoir

$$\frac{\partial z}{\partial y} = Y(x, y, z).$$

Or la relation (5) donne, par dérivation par rapport à y,

$$(7) \qquad \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = \Phi'(y),$$

d'où l'on tire $\frac{\partial z}{\partial y}$; si nous exprimons que cette valeur de $\frac{\partial z}{\partial y}$ est égale à Y, nous avons l'équation

$$(8) \qquad \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}Y = \Phi'(y),$$

qui doit être satisfaite quand on y remplace z par la fonction $z(x, y)$ définie par (5).

Ainsi, tout revient à voir si l'on peut déterminer la fonction arbitraire $\Phi(y)$, de telle manière qu'en tirant z de (5) et portant dans (8), on obtienne une identité en x et y.

Or (5) donne pour z une expression de la forme

$$z = \mathrm{F}[x, y, \Phi(y)],$$

et, après substitution de cette valeur dans (8), le premier membre de (8) devient une fonction de $x, y, \Phi(y)$; le second membre est une fonction de y seul, $\Phi'(y)$: on n'arrivera donc à une identité que si le premier membre nouveau ne contient pas x; alors l'équation (8) se réduira à une relation entre y, $\Phi(y)$, $\Phi'(y)$, c'est-à-dire à une équation différentielle du premier ordre en $\Phi(y)$. Elle deviendra une identité si l'on prend pour $\Phi(y)$ l'intégrale générale de cette équation différentielle, intégrale *qui contient une constante arbitraire*.

Donc enfin, la condition nécessaire et suffisante pour que la fonction z, définie par (5), vérifie (8) est que, en remplaçant z par sa valeur tirée de (5) dans le *premier membre* de (8), on obtienne un résultat indépendant de x. Cela revient à dire que le premier membre de (8), où z est défini par (5), a une dérivée nulle par rapport à x; c'est-à-dire que l'on a, quels que soient x et y,

$$(9) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + \mathrm{Y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z\, \partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \frac{\partial f}{\partial z}\left(\frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0.$$

Or, pour la fonction z définie par (5), $\frac{\partial z}{\partial x}$ est égal à X puisque l'équation (5) est l'intégrale générale de $\frac{\partial z}{\partial x} = \mathrm{X}$; d'ailleurs, en vertu de l'*identité* (6), $\frac{\partial f}{\partial x} = -\mathrm{X}\frac{\partial f}{\partial z}$, on a *identiquement*, quels que soient x, y et z,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = -\mathrm{X}\frac{\partial^2 f}{\partial z\, \partial y} - \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial z}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial z} = -\mathrm{X}\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial z}.$$

Portons les valeurs précédentes de $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial z}$ dans l'équation (9); celle-ci devient, après réductions,

$$\frac{\partial f}{\partial z}\left(\frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial z}\mathrm{X} - \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial y} - \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial z}\mathrm{Y}\right) = 0,$$

et se trouve satisfaite identiquement, en vertu même de l'hypothèse faite sur *la condition d'intégrabilité* (3).

Il résulte de toute cette analyse que, si la condition d'intégrabilité (3) est satisfaite identiquement, on pourra trouver une fonction $\Phi(y)$, renfermant une constante arbitraire, telle que la fonction z définie par (5) vérifie le système (2); en d'autres termes, l'équation aux différentielles totales (1) admettra alors une solution, dépendant d'une constante arbitraire, et qu'on obtiendra comme il vient d'être expliqué : on aura, pour déterminer $\Phi(y)$, à intégrer une équation différentielle du premier ordre.

419. Exemple. — Soit l'équation aux différentielles totales

$$dz = n\frac{z}{x}dx + m\frac{z}{y}dy, \tag{10}$$

n et m désignant des constantes; elle revient au système

$$\frac{\partial z}{\partial x} = n\frac{z}{x}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = m\frac{z}{y}. \tag{11}$$

La condition d'intégrabilité est ici

$$n\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{z}{x}\right) + m\frac{z}{y}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{nz}{x}\right) = m\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{z}{y}\right) + \frac{nz}{x}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{mz}{y}\right).$$

Comme $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{z}{x}\right) = 0$, et que de même $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{z}{y}\right) = 0$, il reste

$$mn\frac{z}{y}\left(\frac{1}{x}\right) = nm\frac{z}{x}\left(\frac{1}{y}\right),$$

et la condition d'intégrabilité est vérifiée identiquement.

Intégrons maintenant la première équation (11); le système auxiliaire est

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{0} = \frac{x}{nz}dz, \qquad \text{ou} \qquad dy = 0, \qquad n\frac{dx}{x} - \frac{dz}{z} = 0,$$

ce qui donne

$$y = C_1, \qquad \frac{z}{x^n} = C_2.$$

L'intégrale générale z de la première équation (11) est donc

donnée par

$$(12) \qquad z = x^n \Phi(y),$$

d'où, par dérivation par rapport à y,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^n \Phi'(y),$$

et, puisque z doit satisfaire à la seconde équation (11),

$$(13) \qquad m\frac{z}{y} = x^n \Phi'(y).$$

Il faut déterminer $\Phi(y)$ de manière que z, défini par (12), vérifie (13), ce qui donne

$$\frac{m}{y}\Phi(y) = \Phi'(y), \qquad \text{ou} \qquad \frac{\Phi'(y)}{\Phi(y)} = \frac{m}{y},$$

et, par intégration,

$$\log\Phi(y) = m\log y + \log\alpha,$$

α désignant une constante arbitraire. La solution z de l'équation (10), ou du système (11), est donc donnée par l'équation (12), où l'on remplace $\Phi(y)$ par sa valeur précédente; on trouve ainsi

$$z = \alpha x^n y^m.$$

420. Remarque. — La méthode des nos 417-418 permet de trouver, si elle existe, la solution, z, d'un système de deux équations du type

$$(14) \qquad F_1(x, y, z, p, q) = 0, \qquad F_2(x, y, z, p, q) = 0,$$

p et q désignant $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Car en résolvant ces deux équations en p et q, on a

$$p = X(x, y, z), \qquad q = Y(x, y, z),$$

et l'on est ramené au système (2) traité plus haut.

Si les deux équations (14) ne pouvaient être résolues en p et q, c'est qu'en tirant p de la première et portant dans la seconde,

on réduirait celle-ci à une équation

$$\psi(x, y, z) = 0,$$

indépendante de q. On examinera alors si la fonction z, définie par cette équation, vérifie le système (14), et, selon le résultat du calcul, le système aura ou n'aura pas de solution.

IV. — ÉQUATIONS DU PREMIER ORDRE AUX DÉRIVÉES PARTIELLES A DEUX VARIABLES INDÉPENDANTES.

---

421. Ce sont les équations de la forme

$$(1) \qquad f(x, y, z, p, q) = 0,$$

en posant, pour simplifier l'écriture,

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \qquad q = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Lagrange a donné, pour intégrer l'équation (1), une méthode extrêmement remarquable.

On suppose connue, et nous verrons plus loin le moyen de l'obtenir, ce qu'on appelle une *solution* ou *intégrale complète*, c'est-à-dire une relation entre x, y, z et *deux* constantes arbitraires, α et β,

$$(2) \qquad \Phi(x, y, z, \alpha, \beta) = 0,$$

telle que la fonction z définie par cette relation soit une solution de la proposée (1), quelles que soient les valeurs des constantes α et β.

Une telle fonction Φ étant connue, on peut en déduire l'équation différentielle (1) : car on a, en dérivant (2) par rapport aux variables indépendantes x, y,

$$(3) \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial x} + p \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0,$$

$$(4) \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial y} + q \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0,$$

et, en éliminant α et β entre (2), (3) et (4), on arrive à une relation

$$(5) \qquad F(x, y, z, p, q) = 0,$$

que je dis être identique à la proposée (1). Car, s'il en était autrement, entre les relations (1) et (5), que vérifie la fonction z, de x, y, définie par (2), éliminons q : nous obtenons une relation

$$\theta(x, y, z, p) = 0,$$

vérifiée par cette même fonction. Or, en choisissant convenablement α et β dans (2), on peut faire en sorte que, pour x et y donnés, z et $\frac{\partial z}{\partial x}$, ou p, aient des valeurs arbitraires (¹) : il ne

---

(¹) Voici comment on peut rendre ce point rigoureux. Résolvons l'équation (2) par rapport à β

$$(2\ bis) \qquad \beta = \varphi(x, y, z, \alpha).$$

Je dis d'abord que l'une au moins des dérivées partielles $\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z}$ contient α. Car on a identiquement

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z}dz + \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}d\alpha,$$

d'où (Tome I, n° 328),

$$\varphi = \int_0^x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \int_0^y \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_0 dy + \int_0^z \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)_{00} dz + \int_0^\alpha \frac{\partial \varphi(0, 0, 0, \alpha)}{\partial \alpha} d\alpha + \text{const.},$$

et si $\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z}$ ne contiennent pas α, on voit que α ne figure dans φ qu'au dernier terme, de sorte que $\varphi = \text{fonct.}(x, y, z) + \psi(\alpha)$. L'équation (2 *bis*) s'écrit alors

$$\beta - \psi(\alpha) = \text{fonct.}(x, y, z);$$

et elle ne renferme en réalité qu'*une seule* constante, $\beta - \psi(\alpha)$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Cela posé supposons que $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ ou $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ contienne α; je dis qu'en choisissant convenablement α et β dans (2 *bis*) on peut faire en sorte que, pour x et y donnés, z et p aient des valeurs arbitraires. Dérivons en effet (2 *bis*) par rapport à x; il vient

$$0 = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + p\frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

saurait donc exister de relation entre x, y, z, p; d'où la nécessité que les équations (1) et (5) soient les mêmes.

422. Mode d'intégration. — Voici maintenant comment Lagrange déduit de l'intégrale complète $\Phi = 0$ toutes les solutions de la proposée (1).

L'équation (1) étant, comme on vient de le voir, le résultat de l'élimination de α, β entre (2), (3) et (4), peut être remplacée par le système des trois équations (2), (3) et (4), où les inconnues sont z, α et β : en d'autres termes, intégrer (1) revient à trouver trois *fonctions*, z, α, β, de x et y, vérifiant (2), (3) et (4). Or si l'on dérive (2) par rapport à x et y, et en considérant α et β comme des fonctions de x et y, il vient

$$(2') \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial\Phi}{\partial x} + p\frac{\partial\Phi}{\partial z} + \frac{\partial\Phi}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\Phi}{\partial\beta}\frac{\partial\beta}{\partial x} = 0, \\ &\frac{\partial\Phi}{\partial y} + q\frac{\partial\Phi}{\partial z} + \frac{\partial\Phi}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial y} + \frac{\partial\Phi}{\partial\beta}\frac{\partial\beta}{\partial y} = 0, \end{aligned} \right.$$

équations qui, si l'on tient compte de (3) et (4), deviennent

$$(6) \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\Phi}{\partial\beta}\frac{\partial\beta}{\partial x} = 0,$$

$$(7) \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial y} + \frac{\partial\Phi}{\partial\beta}\frac{\partial\beta}{\partial y} = 0,$$

et le système des équations (2), (6) et (7) est évidemment équivalent au système (2), (3) et (4) dont on l'a tiré : car (2) entraîne (2′) qui, si l'on tient compte de (6) et de (7), donne (3) et (4).

Or les relations (6) et (7) sont linéaires et homogènes en $\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha}$ et $\frac{\partial\Phi}{\partial\beta}$; deux cas sont donc à distinguer :

équation d'où l'on peut tirer α en fonction de x, y, z et p, puisque α y figure par hypothèse. L'équation (2 *bis*) donne ensuite β.

Si α ne figure ni dans $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ ni dans $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$, il figure dans $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$; alors c'est p qu'il faut éliminer entre (1) et (5); on obtient ainsi une relation

$$\theta_1(x, y, z, q) = 0,$$

dont on démontre l'impossibilité comme ci-dessus.

1° Le déterminant $\frac{\partial\alpha}{\partial x}\frac{\partial\beta}{\partial y} - \frac{\partial\beta}{\partial x}\frac{\partial\alpha}{\partial y}$ n'est pas nul : les relations (6) et (7) donnent alors

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha} = 0, \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial\beta} = 0,$$

équations qui, jointes à (2), déterminent z, α et β, et, par élimination de α et β, l'inconnue principale z.

On obtient ainsi une solution, z, de l'équation proposée, qui ne contient rien d'arbitraire; c'est ce que Lagrange appelle la *solution ou intégrale singulière*.

2° Si le déterminant (Jacobien) $\frac{\partial\alpha}{\partial x}\frac{\partial\beta}{\partial y} - \frac{\partial\beta}{\partial x}\frac{\partial\alpha}{\partial y}$ est nul, cela exprime (Cours de 1re année, n° 51) qu'il existe une relation entre α et β,

$$\beta = \varphi(\alpha), \tag{8}$$

φ étant une fonction de α, quelconque d'ailleurs. Introduisons cette hypothèse dans les équations (6) et (7), celles-ci deviennent

$$\frac{\partial\alpha}{\partial x}\left[\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha} + \frac{\partial\Phi}{\partial\beta}\varphi'(\alpha)\right] = 0,$$

$$\frac{\partial\alpha}{\partial y}\left[\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha} + \frac{\partial\Phi}{\partial\beta}\varphi'(\alpha)\right] = 0;$$

auxquelles on peut satisfaire de deux manières :

a. En posant

$$\frac{\partial\alpha}{\partial x} = \frac{\partial\alpha}{\partial y} = 0, \qquad \text{d'où} \qquad \alpha = \text{const.}$$

et, en vertu de (8), $\beta = \text{const.}$; on retrouve ainsi l'intégrale complète $\Phi(x, y, z, \alpha, \beta) = 0$, dont on est parti.

b. En posant

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha} + \frac{\partial\Phi}{\partial\beta}\varphi'(\alpha) = 0. \tag{9}$$

Les inconnues z, α, β sont alors déterminées par les trois équations (2), (8), (9)

$$\Phi = 0, \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial\alpha} + \frac{\partial\Phi}{\partial\beta}\varphi'(\alpha) = 0, \qquad \beta = \varphi(\alpha),$$

où φ désigne *une fonction arbitraire*. L'élimination théorique de α et β donnerait une solution, z, dépendant *d'une fonction arbitraire;* c'est cette solution que Lagrange appelle *solution* ou *intégrale générale*.

Le problème de déduire d'une intégrale complète *toutes* les autres intégrales est ainsi complètement résolu.

423. Interprétation géométrique. — L'intégrale complète

$$\Phi(x, y, z, \alpha, \beta) = 0,$$

où α et β sont des constantes, représente, en x, y, z, une surface; en faisant varier α et β, on obtient une *double infinité* de surfaces, qui sont toutes, par hypothèse, des surfaces intégrales de l'équation proposée (1).

L'intégrale singulière, surface obtenue en éliminant α et β entre

$$\Phi = 0, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} = 0, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} = 0,$$

est *l'enveloppe* de ces surfaces, chaque enveloppée touchant l'enveloppe en un nombre limité de points (Tome I, n° 363). Par exemple si les surfaces $\Phi = 0$ sont des plans, l'intégrale singulière est la surface, S, que touchent tous ces plans, chaque plan touchant l'enveloppe en un seul point.

On obtient l'intégrale générale en considérant dans la série doublement infinie des surfaces $\Phi = 0$ une série quelconque, simplement infinie [ce qu'on fait en établissant entre α et β une relation quelconque, $\beta = \varphi(\alpha)$] et en prenant l'enveloppe des surfaces (à un paramètre) ainsi déterminées. En effet les équations qui définissent l'intégrale générale

$$\Phi(x, y, z, \alpha, \beta) = 0, \qquad \beta = \varphi(\alpha), \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} + \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} \varphi'(\alpha) = 0,$$

donnent, par l'élimination de β,

$$\Phi[x, y, z, \alpha, \varphi(\alpha)] = 0, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \varphi'(\alpha) = 0.$$

Or la seconde équation a pour premier membre la dérivée de $\Phi[x, y, z, \alpha, \varphi(\alpha)]$ par rapport à α; l'élimination de α entre les deux dernières relations donne donc l'enveloppe des surfaces

$\Phi[x, y, z, \alpha, \varphi(\alpha)] = 0$, ce qui démontre la proposition. Les enveloppées considérées touchent alors leur enveloppe tout le long d'une ligne (caractéristique).

424. **Exemple.** — Si les surfaces Φ sont les plans tangents d'une surface S, l'intégrale générale est l'enveloppe d'une série simplement infinie de ces plans, c'est-à-dire une surface développable, quelconque d'ailleurs, circonscrite à S.

Autre exemple. — Les surfaces $\Phi = 0$ sont des sphères de rayon donné R, ayant leurs centres dans un plan Π : l'intégrale singulière, enveloppe de toutes ces surfaces, est l'ensemble des deux plans parallèles au plan Π, situés à une distance R de celui-ci; l'intégrale générale est une surface-canal, enveloppe des sphères de la série dont les centres décrivent une ligne quelconque du plan Π; chacune des sphères de la série touche cette enveloppe le long d'un grand cercle.

425. *En résumé,* l'intégrale singulière est l'enveloppe des surfaces, en nombre doublement infini, représentées par l'intégrale complète, chaque surface touchant l'enveloppe en un nombre limité de points; l'intégrale générale est l'enveloppe d'une série simplement infinie de ces surfaces, chacune de ces enveloppées touchant l'enveloppe le long d'une ligne. C'est le choix arbitraire de la série simplement infinie qui introduit, dans l'intégrale générale, une fonction arbitraire.

426. **Remarques.** — 1° Il était évident *a priori* que l'enveloppe de toutes les surfaces $\Phi = 0$, ou d'une infinité simple d'entre elles, serait une solution de la proposée $f(x, y, z, p, q) = 0$, car, en un *quelconque* de ses points, l'une ou l'autre enveloppe touche une des surfaces Φ, de sorte qu'en ce point x, y, z, p, q sont les mêmes pour l'enveloppe et pour la surface Φ : celle-ci vérifiant la proposée, il en est de même de l'enveloppe.

2° L'intégrale singulière est l'enveloppe, non seulement des surfaces $\Phi = 0$, qui répondent à l'intégrale complète considérée, mais de toutes les surfaces données par l'intégrale générale. Cela résulte de ce théorème de Géométrie facile à établir : Soit une

infinité simple de surfaces Φ', dont chacune touche, en un ou plusieurs points, $a_1, a_2, \ldots$, une surface S; l'enveloppe des surfaces Φ' touche S le long d'une ligne qui est le lieu des points $a_1, a_2, \ldots$.

3° Il y a une infinité d'intégrales complètes; on les obtient en prenant pour $\varphi(\alpha)$ une fonction renfermant deux constantes arbitraires. Elles sont donc comprises, comme cas particuliers, dans l'intégrale générale.

4° La solution singulière, S, reste la même quelle que soit l'intégrale complète dont on parte : car, d'après 2°, elle est aussi l'enveloppe des surfaces correspondant à l'intégrale générale, ce qui la définit complètement.

427. Au point de vue analytique, la solution, z, de l'équation différentielle ne peut être effectivement obtenue sous sa forme générale, puisqu'il faudrait, pour l'obtenir, éliminer α et β entre

$$\Phi = 0, \qquad \beta = \varphi(\alpha), \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} + \frac{\partial \Phi}{\partial \beta}\varphi'(\alpha) = 0,$$

ou, encore, éliminer α entre

$$(10) \qquad \Phi[x, y, z, \alpha, \varphi(\alpha)] = 0 \qquad \text{et} \qquad \Phi'_\alpha = 0,$$

ce qui est impossible tant que l'on ne particularise pas la fonction arbitraire φ. On ne peut donc représenter l'intégrale générale par *une seule équation;* il faut les deux équations (10), qui définissent à la fois l'inconnue cherchée z, et une inconnue auxiliaire α.

Mais, au point de vue géométrique, on peut représenter paramétriquement la surface intégrale générale, et cela d'une manière explicite. Tirons en effet des deux équations (10) les valeurs de deux des coordonnées x, y, z; par exemple de y et de z : ce calcul est possible théoriquement, puisque ni x, ni y, ni z ne sont engagés sous le signe de la fonction arbitraire φ. On aura ainsi

$$y = F_1[x, \alpha, \varphi(\alpha), \varphi'(\alpha)], \qquad z = F_2[x, \alpha, \varphi(\alpha), \varphi'(\alpha)],$$

et, en y joignant l'équation $x = x$, on aura x, y et z exprimés en fonction de deux paramètres, x et α, ce qui définit la surface intégrale générale. Nous verrons une application de cette remarque au n° 437.

428. Remarques. — On peut aisément, quand on connaît une intégrale générale complète, $\Phi = 0$, obtenir la *surface intégrale qui passe par une courbe donnée;* il suffit pour cela de prendre les surfaces $\Phi(x, y, z, \alpha, \beta) = 0$ qui touchent cette courbe; elles sont en nombre simplement infini, et leur enveloppe est une surface intégrale qui, évidemment, contient la courbe [1].

De même l'enveloppe des surfaces $\Phi(x, y, z, \alpha, \beta) = 0$ qui touchent une surface donnée, Σ, est une *surface intégrale circonscrite à* Σ.

429. Détermination d'une intégrale complète de $f(x, y, z, p, q) = 0$. — D'après la théorie qui précède, l'intégration de l'équation

$$(1) \qquad f(x, y, z, p, q) = 0$$

se ramène à la détermination d'une intégrale complète, c'est-à-dire contenant deux constantes arbitraires.

A cet effet, cherchons à adjoindre à l'équation (1) une équation du même type, *renfermant une constante arbitraire,* α,

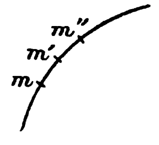
$$(2) \qquad \varphi(x, y, z, p, q) = 0,$$

et telle que le système des deux équations (1) et (2) admette une solution z, *dépendant d'une constante arbitraire,* β : cette

---

(1) Je dis en effet que si des surfaces Φ, en nombre simplement infini, touchent une courbe C, leur enveloppe contient cette courbe. Car, dire qu'une surface Φ touche C, c'est dire qu'elle coupe C en deux points infiniment voisins m et m'; de même, une surface Φ', voisine de Φ, coupe C en m' (*fig.* 91), et en un point

Fig. 91.



voisin, m''. Le point m' est donc commun à Φ et à Φ', et, en passant à la limite, on voit que la surface Φ est coupée par la surface infiniment voisine suivant une ligne qui passe par m. Or l'enveloppe des surfaces Φ est le lieu des lignes suivant lesquelles chacune d'elles est coupée par la surface infiniment voisine de la série; ce lieu contient donc le lieu du point m, c'est-à-dire la courbe C.

fonction z, contenant les constantes α et β, sera dès lors une intégrale complète de (1).

Or, pour que le système (1), (2) admette une solution z, renfermant une constante, il faut et il suffit (nᵒˢ **420** et **417**) que, p et q étant tirés de (1) et (2) sous la forme

$$p = \mathrm{X}(x, y, z), \qquad q = \mathrm{Y}(x, y, z),$$

les fonctions X et Y vérifient identiquement la condition d'intégrabilité du n° **417**, qui est, en écrivant p et q à la place de X et Y,

$$\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial z} q = \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial z} p. \tag{3}$$

Formons, en partant des équations (1) et (2), qui définissent p et q, les dérivées $\frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial z}, \frac{\partial q}{\partial x}, \frac{\partial q}{\partial z}$ qui figurent dans (3) : ce sont, par définition, les dérivées partielles de p et de q quand on regarde ces quantités comme fonctions des variables x, y, z, supposées indépendantes.

En dérivant par rapport à x les deux équations (1) et (2), on a

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x} = 0,$$

d'où l'on tire

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial \varphi}{\partial q} - \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial \varphi}{\partial p}}.$$

On trouverait de même, en dérivant (1) et (2) par rapport à y, puis par rapport à z,

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial q} - \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial \varphi}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial \varphi}{\partial q} - \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial \varphi}{\partial p}},$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial q} - \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial \varphi}{\partial z}}{\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial \varphi}{\partial q} - \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial \varphi}{\partial p}}, \qquad \frac{\partial q}{\partial z} = \frac{\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial \varphi}{\partial z}}{\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial \varphi}{\partial q} - \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial \varphi}{\partial p}},$$

et, si l'on porte ces valeurs dans la condition d'intégrabilité (3),

celle-ci devient

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial p}\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial q}\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}+\left(p\dfrac{\partial f}{\partial p}+q\dfrac{\partial f}{\partial q}\right)\dfrac{\partial \varphi}{\partial z} \\ -\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}+p\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)\dfrac{\partial \varphi}{\partial p}-\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}+q\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)\dfrac{\partial \varphi}{\partial q}=0. \end{cases}$$

Elle doit être (nos **417-418**) identiquement vérifiée *en* x, y, z quand on y a remplacé p et q par leurs valeurs en x, y, z tirées de (1) et (2). *A fortiori*, la condition d'intégrabilité sera satisfaite si l'équation (4) est une identité *en* x, y, z, p, q. A ce point de vue cette équation est une équation linéaire sans second membre, par rapport aux dérivées de la fonction inconnue φ, les variables indépendantes étant x, y, z, p, q; et il résulte de notre analyse que, si φ est une solution *quelconque* de (4), le *système* $f(x, y, z, p, q)=0$, $\varphi(x, y, z, p, q)=0$ admettra une solution z, dépendant d'une constante arbitraire, β (n° **418**).

Pour obtenir ainsi une intégrale complète de $f(x, y, z, p, q)=0$, il suffira donc de trouver une solution, φ, de (4), contenant une constante arbitraire, α. Or l'intégration de l'équation (4), où les variables indépendantes sont x, y, z, p, q, se ramène à celle du système auxiliaire *d'ordre quatre*

$$(5)\quad \frac{dx}{\left(\dfrac{\partial f}{\partial p}\right)}=\frac{dy}{\left(\dfrac{\partial f}{\partial q}\right)}=\frac{dz}{p\dfrac{\partial f}{\partial p}+q\dfrac{\partial f}{\partial q}}=\frac{-dp}{\dfrac{\partial f}{\partial x}+p\dfrac{\partial f}{\partial z}}=\frac{-dq}{\dfrac{\partial f}{\partial y}+q\dfrac{\partial f}{\partial z}},$$

et, si φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 sont quatre intégrales premières distinctes de ce système, l'intégrale *générale*, φ, de l'équation (4) est

$$(6)\quad \varphi=F(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4),$$

F étant une fonction arbitraire. Si donc on a trouvé une *seule* intégrale première du système (5), $\varphi_1(x, y, z, p, q)=$ const., une solution *particulière* φ, de (4), sera, en vertu de (6),

$$\varphi=\varphi_1+\alpha,$$

α désignant une constante arbitraire.

Avec cette valeur de φ, le système (1), (2) sera

$$(7)\quad f(x, y, z, p, q)=0, \qquad \varphi_1(x, y, z, p, q)+\alpha=0,$$

et admettra, comme on l'a dit plus haut, une solution z, qu'on

trouvera par la méthode du n° **418**, qui renfermera une nouvelle constante, β, et sera dès lors une intégrale complète de l'équation proposée (1).

430. **Remarque.** — On peut observer que $\varphi = f(x, y, z, p, q)$ vérifie identiquement l'équation (4), ce qui prouve (n° **408**), que $f =$ const. est une intégrale première du système (5). C'est une *autre* intégrale première de ce système qu'il faut trouver, car l'hypothèse $\varphi_1 = f$ introduite dans (7) conduirait à une absurdité, si $\alpha \gtrless 0$, ou à une indétermination, si $\alpha = 0$. Toutefois la connaissance de l'intégrale première $f = 0$ permet d'abaisser d'une unité l'ordre du système (5), (n° **329**), c'est-à-dire de le ramener au troisième ordre. *Cette remarque donne la mesure de la difficulté du problème;* on voit ainsi que l'intégration de l'équation $f(x, y, z, p, q) = 0$ se ramène à la recherche d'une intégrale première d'un système canonique d'ordre trois, qu'on fera suivre de l'intégration d'une équation différentielle du premier ordre (n° **428**) pour déterminer la solution du système (7).

431. **Cas de l'équation** $f(x, y, p, q)$. — Si l'équation proposée (1) ne contient pas l'inconnue z, c'est-à-dire si elle est du type

$$f(x, y, p, q) = 0,$$

on cherchera une fonction φ, de même forme, telle que les deux équations

$$(8) \qquad f(x, y, p, q) = 0, \qquad \varphi(x, y, p, q) = 0$$

donnent, pour p et q, deux fonctions de x et de y pouvant être les dérivées partielles, par rapport à x et y, d'une même fonction z. Il faut pour cela (Tome I, n° 327) que $\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$, c'est-à-dire, en tirant $\frac{\partial p}{\partial y}$ et $\frac{\partial q}{\partial x}$ des équations (8), qu'on ait

$$(9) \qquad \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial q} = 0.$$

Si donc $\varphi_1(x, y, p, q) =$ const. est une intégrale première du système

$$(10) \qquad \frac{dx}{\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)} = \frac{dy}{\left(\frac{\partial f}{\partial q}\right)} = \frac{-dp}{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)} = \frac{-dq}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)},$$

les deux équations

$$f(x, y, p, q) = 0, \qquad \varphi_1(x, y, p, q) + \alpha = 0$$

définiront deux fonctions, p et q, de x et y, telles que $\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$. La fonction z, dont les dérivées partielles sont p et q, vérifiera d'après cela l'équation proposée $f(x, y, p, q) = 0$, et sera donnée par la formule (Tome I, n° 327)

$$(11) \qquad z = \int_{x_0}^{x} p(x, y)\, dx + \int_{y_0}^{y} q(x_0, y)\, dy + \beta;$$

ce sera donc une intégrale complète de $f(x, y, p, q) = 0$, puisqu'elle dépend des deux constantes arbitraires α et β.

Le cas particulier examiné ici est plus simple que le cas général en ce que, la fonction φ_1 étant obtenue, on n'a, pour trouver z, qu'à effectuer les deux quadratures (11), au lieu d'avoir à intégrer une équation différentielle du premier ordre.

D'ailleurs les équations (9) et (10) sont comprises dans les équations (4) et (5) du cas général.

432. Exemple. — Soit à intégrer l'équation

$$px + qy = f_1(p, q).$$

Les deux dernières équations du système (10) donnent

$$\frac{dp}{p} = \frac{dq}{q}, \qquad \text{d'où} \qquad q = \alpha p,$$

ce qui est une intégrale première de (10). Portant la valeur $q = \alpha p$ dans la proposée, on en tirera p en fonction de x, y, α; on en déduira q, qui est égal à αp, puis une intégrale complète z, par le procédé ci-dessus.

Si par exemple la proposée est

$$px + qy = pq,$$

on aura

$$p = \frac{1}{\alpha}(x + \alpha y), \qquad q = x + \alpha y,$$

$$z = \int \left[\frac{1}{\alpha}(x + \alpha y)\, dx + (x + \alpha y)\, dy\right]$$

$$= \int_0^x \frac{1}{\alpha}(x + \alpha y)\, dx + \int_0^y \alpha y\, dy + \beta,$$

c'est-à-dire, tous calculs faits,

$$z = \frac{1}{2\alpha}(x + \alpha y)^2 + \beta,$$

intégrale complète de la proposée.

433. **Cas particuliers divers.** — Dans quelques cas, il est possible de découvrir directement, sans qu'il soit nécessaire d'appliquer les méthodes générales, une intégrale complète de l'équation $f(x, y, z, p, q) = 0$. Voici des exemples :

1° L'inconnue z et l'une des variables x, ou y, manquent dans l'équation : si y manque, résolvons l'équation par rapport à p,

$$p = \psi(x, q);$$

on voit de suite que si l'on pose $q = \alpha$ (α étant une constante), d'où $p = \psi(x, \alpha)$, la condition *d'intégrabilité*, $\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$, sera satisfaite, ses deux membres étant nuls. On a donc une intégrale complète par la formule

$$z = \int \psi(x, \alpha)\, dx + \alpha y + \beta.$$

2° Si l'équation proposée peut se mettre sous la forme

$$f_1(x, p) = f_2(y, q),$$

on posera

$$f_1(x, p) = f_2(y, q) = \alpha,$$

α étant une constante arbitraire, d'où l'on tirera

$$p = \varphi_1(x, \alpha), \qquad q = \varphi_2(y, \alpha);$$

p étant une fonction de x seul, et q de y seul, la condition $\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$ est encore satisfaite (ses deux membres étant nuls) et une intégrale complète de la proposée est

$$z = \int \varphi_1(x, \alpha)\, dx + \int \varphi_2(y, \alpha)\, dy + \beta.$$

On peut appliquer ce procédé aux équations

$$pq = xy, \qquad p^2 + q^2 = x^2 + y^2,$$

en les écrivant

$$\frac{p}{x} = \frac{y}{q}, \qquad p^2 - x^2 = y^2 - q^2.$$

3° Parfois on peut apercevoir immédiatement une intégrale complète; par exemple, dans le cas de *l'équation de Clairaut généralisée*

$$z = px + qy + \psi(p, q),$$

on a une intégrale complète en prenant

$$z = \alpha x + \beta y + \psi(\alpha, \beta),$$

α et β étant deux constantes; car cette relation donne $p = \alpha$, $q = \beta$, et ces valeurs de z, p, q vérifient bien la proposée. Les surfaces représentées par l'intégrale complète sont des plans, dont l'enveloppe s'obtient par l'élimination de α et β entre

$$z = \alpha x + \beta y + \psi(\alpha, \beta), \qquad x + \psi'_\alpha = 0, \qquad y + \psi'_\beta = 0;$$

cette enveloppe est l'intégrale singulière; l'intégrale générale est une surface développable quelconque circonscrite à la précédente (n° 423).

4° Une équation du type $f(x, z, p, q) = 0$, qui ne renferme pas l'une des variables indépendantes, ici y, se ramène au type $f(x, y, p, q) = 0$ du n° 431, si l'on prend y pour inconnue, x et z pour variables indépendantes.

La relation

$$dz = p\,dx + q\,dy, \qquad \text{ou} \qquad dy = -\frac{p}{q}dx + \frac{1}{q}dz,$$

donne en effet

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{p}{q}, \qquad \frac{\partial y}{\partial z} = \frac{1}{q}; \qquad \text{d'où} \qquad -p = \frac{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)}, \qquad q = \frac{1}{\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)};$$

la proposée devient donc

$$f\left(x, z, -\frac{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)}, \frac{1}{\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)}\right) = 0$$

et ne contient pas l'inconnue y. C. Q. F. D.

V. — ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES D'ORDRE SUPÉRIEUR AU PREMIER.

434. On se bornera à donner quelques exemples d'intégration d'équations aux dérivées partielles du second ordre : l'intégrale générale d'une telle équation contient (n° 405) deux fonctions arbitraires.

435. Il peut arriver que tous les termes de l'équation soient des dérivées exactes par rapport à l'une des variables ; soit par exemple l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y} = \frac{\partial z}{\partial x};$$

on en tirera de suite, en intégrant les deux membres par rapport à x,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = z + \varphi(y),$$

$\varphi(y)$ étant une fonction arbitraire de y (car la constante d'intégration ne doit être constante que par rapport à x). On est ainsi ramené à une équation du premier ordre linéaire par rapport aux dérivées partielles, et à laquelle s'applique la méthode générale du n° 412.

436. Si, dans l'équation différentielle proposée, il n'entre que des dérivées prises par rapport à l'une des variables, on regardera les autres variables comme des constantes et l'on aura à intégrer une équation différentielle ordinaire à une inconnue et à une variable ; seulement on aura soin de remplacer les constantes introduites dans l'intégration par des fonctions *arbitraires* des variables regardées comme constantes. Soit, par exemple, l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 3x \frac{\partial z}{\partial y} + 2x^2 z = 0;$$

en y regardant x comme constant, c'est une équation linéaire, à coefficients constants, sans second membre. L'équation caracté-

ristique (n° 350) est ici

$$s^2 - 3xs + 2x^2 = 0,$$

ses racines sont $s = x$ et $s = 2x$. L'intégrale générale est donc

$$z = c_1 e^{xy} + c_2 e^{2xy},$$

c_1 et c_2 étant des fonctions arbitraires de x.

437. Donnons une application géométrique de ces considérations.

Problème. — *Trouver les surfaces sur lesquelles les lignes de courbure d'un système sont situées dans des plans parallèles.*

Soit $z = f(x, y)$ la surface cherchée; posons comme d'ordinaire $\frac{\partial z}{\partial x} = p, \ldots, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r, \ldots$; l'équation différentielle des lignes de courbure est (Tome I, n° 431)

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 [pqt - s(1+q^2)] + \frac{dy}{dx}[(1+p^2)t - (1+q^2)r] + s(1+p^2) - pqr = 0.$$

Si nous prenons pour plan des xz un plan parallèle à ceux des lignes de courbure du système considéré, l'équation ci-dessus devra être vérifiée pour $y =$ const., $dy = 0$, c'est-à-dire que l'on aura, pour déterminer z, l'équation aux dérivées partielles du second ordre

$$s(1+p^2) - pqr = 0, \tag{1}$$

qu'on peut écrire

$$\frac{pr}{1+p^2} = \frac{s}{q}, \qquad \text{ou} \qquad \frac{p\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)}{1+p^2} = \frac{\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)}{q},$$

car $r = \frac{\partial p}{\partial x}$, $s = \frac{\partial q}{\partial x}$. Sous cette dernière forme les deux membres de l'équation différentielle sont des dérivées exactes par rapport à x (n° 435); intégrons, il vient

$$\frac{1}{2}\log(1+p^2) + \text{const.} = \log q,$$

la constante étant une fonction arbitraire de y, que nous désigne-

rons par $\log \varphi'(y)$. On a ainsi

$$(2) \qquad q = \sqrt{1+p^2}\,\varphi'(y),$$

équation aux dérivées partielles du premier ordre qui ne renferme ni z ni x. On aura donc une intégrale complète (n° 433, 1°) en posant

$$p = \alpha, \qquad \text{d'où} \qquad q = \sqrt{1+\alpha^2}\,\varphi'(y),$$

α étant une constante, ce qui donne

$$z = \int (p\,dx + q\,dy) = \alpha x + \sqrt{1+\alpha^2}\,\varphi(y) + \beta,$$

intégrale complète avec les deux constantes arbitraires α et β.

L'intégrale générale de (2), c'est-à-dire la surface cherchée, s'obtiendra donc, suivant la méthode de Lagrange, par l'élimination du paramètre α entre les deux équations

$$z = \alpha x + \sqrt{1+\alpha^2}\,\varphi(y) + \psi(\alpha),$$

$$0 = x + \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}\varphi(y) + \psi'(\alpha),$$

$\psi(\alpha)$ étant une fonction arbitraire du paramètre α. On peut, pour obtenir une représentation paramétrique de la surface cherchée (n° 427), résoudre ces deux équations par rapport à x et à z, ce qui donne

$$x = -\frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}\varphi(y) - \psi'(\alpha),$$

$$z = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}\varphi(y) + \psi(\alpha) - \alpha\,\psi'(\alpha).$$

En y joignant

$$y = y,$$

on a trois équations qui définissent les coordonnées d'un point de la surface cherchée en fonction de deux paramètres α et y, et où φ et ψ sont deux fonctions arbitraires.

On peut simplifier cette représentation paramétrique en posant

$$\varphi(y) = u, \qquad \text{d'où} \qquad y = F(u),$$

F étant évidemment une fonction arbitraire, puisque φ l'est.

On a ainsi

$$x = -\frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}u - \psi'(\alpha),$$

$$y = \mathrm{F}(u),$$

$$z = \frac{u}{\sqrt{1+\alpha^2}} + \psi(\alpha) - \alpha\psi'(\alpha);$$

les deux paramètres sont maintenant α et u; F et ψ sont les deux fonctions arbitraires qui doivent figurer dans l'équation générale des surfaces cherchées, puisque celles-ci dépendent d'une équation aux dérivées partielles (1) du second ordre.

EXERCICES

SUR LA THÉORIE DES FONCTIONS ANALYTIQUES ET LES FONCTIONS ELLIPTIQUES.

Exercice I. — *La fonction* $\varphi(z)$ *étant méromorphe dans tout le plan, quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'intégrale* $I(z)$,

$$I(z) = \int_{z_0}^{z} \varphi(u)\,du,$$

soit fonction uniforme de z *dans tout le plan.*

La valeur la plus générale de $I(z)$, quand on déforme la ligne d'intégration, est obtenue (nos 151-152) en ajoutant à l'intégrale U, prise le long du segment rectiligne $z_0 z$, la valeur de l'intégrale prise le long d'un nombre quelconque de lacets. Or (nos 153-154) l'intégrale le long du lacet relatif à un pôle a de $\varphi(z)$ est égale (dans le sens positif) à $2\pi i A$, A désignant le résidu correspondant; on a donc finalement

$$I(z) = U + 2\pi i(m_1 A_1 + m_2 A_2 + \ldots),$$

A_i étant le résidu de $\varphi(z)$ relatif au pôle a_i, et m_i un entier *quelconque,* positif, négatif ou nul. Donc, pour que $I(z)$ n'ait qu'une valeur pour une valeur donnée de z, *il faut et il suffit que tous les résidus,* A_i, *de* $\varphi(z)$ *soient nuls.*

Cela exige, en particulier, que tous les pôles de $\varphi(z)$ soient d'un ordre de multiplicité supérieur à 1.

Si les conditions précédentes sont vérifiées, $I(z)$ est non seulement uniforme, mais méromorphe dans tout le plan. En effet ses seuls points critiques possibles sont (n° 110) les pôles de $\varphi(z)$; autour de l'un d'eux, a, on a d'ailleurs (n° 131), puisque le résidu est nul,

$$\varphi(z) = \frac{M}{(z-a)^n} + \ldots + \frac{B}{(z-a)^2} + \psi(z),$$

$\psi(z)$ étant holomorphe aux environs de a, et l'on en conclut

$$I(z) = -\frac{1}{n-1}\frac{M}{(z-a)^{n-1}} - \ldots - \frac{B}{z-a} + \text{const.} + \int_{z_0}^{z} \psi(z)\,dz,$$

ce qui montre que a, pôle d'ordre n de $\varphi(z)$, est, pour $I(z)$, un *pôle* d'ordre $n-1$.

Exemples. — 1° L'intégrale $\int_{z_0}^{z} \frac{du}{\sin^2 u}$ est fonction uniforme de z. En effet, les pôles de $\varphi(z)$ sont les zéros de $\sin z$, c'est-à-dire les points $z = k\pi$. Pour avoir le résidu correspondant, posons $z = k\pi + t$; il vient

$$\frac{1}{\sin^2(k\pi + t)} = \frac{1}{\sin^2 t} = \frac{1}{\left(t - \frac{t^3}{6} + \ldots\right)^2} = \frac{1}{t^2}\frac{1}{\left(1 - \frac{t^2}{6} + \ldots\right)^2}$$
$$= \frac{1}{t^2} + \lambda_0 + \lambda_2 t^2 + \ldots,$$

car le développement ne contient que des puissances paires de t. Le résidu est donc nul, ce qui établit la proposition. On a d'ailleurs directement

$$\int_{z_0}^{z} \frac{du}{\sin^2 u} = -(\cot z - \cot z_0).$$

2° L'intégrale $\int_{z_0}^{z} p^n u\,du$ est aussi une fonction uniforme de z (n entier positif); car autour du pôle $u = 0$, par exemple, le développement de $p^n u$, fonction paire, ne renferme pas de puissances impaires de u, donc pas de terme en $\frac{1}{u}$, et le résidu correspondant est nul. (*Voir* à ce sujet l'Exercice IX.)

Exercice II. — *Dans les mêmes hypothèses, quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que la fonction* $F(z)$,

$$F(z) = e^{\int_{z_0}^{z} \varphi(u)\,du},$$

soit fonction uniforme de z dans tout le plan?

En vertu de ce qui précède, on a, pour la valeur la plus générale de $F(z)$,

$$F(z) = e^{U + 2\pi i(m_1 A_1 + m_2 A_2 + \ldots)},$$

et, pour que le second membre ait une valeur unique, *il faut et il suffit évidemment que tous les résidus*, A_i, *de* $\varphi(z)$ *soient des entiers* positifs, négatifs ou nuls.

S'il en est ainsi, on reconnaît, comme plus haut, qu'autour d'un pôle a, d'ordre n, de $\varphi(z)$, on a

$$\int_{z_0}^{z} \varphi(u)\,du = \frac{-1}{n-1}\frac{M}{(z-a)^{n-1}} - \ldots - \frac{B}{z-a} + A\log(z-a) + \psi(z),$$

d'où

$$F(z) = e^{\frac{\lambda_0}{(z-a)^{n-1}} + \ldots + \frac{\lambda_{n-2}}{z-a} + A\log(z-a) + \psi(z)} = (z-a)^A e^{\frac{\lambda_0}{(z-a)^{n-1}} + \ldots + \psi(z)},$$

et il en résulte (nº 100, 3º) que le point a est, pour $F(z)$, un point singulier essentiel lorsque n est supérieur à 1. Si $n = 1$, c'est un pôle ou un zéro, selon que le résidu A est négatif ou positif.

Dès lors, si l'on veut que $F(z)$ soit non seulement uniforme, mais *méromorphe,* il faut et il suffit que tous les pôles de $\varphi(z)$ soient simples et que les résidus correspondants soient entiers. Pour que $F(z)$ soit *holomorphe,* il faut et il suffit de plus que ces entiers soient positifs.

Exemples. — 1º Soit $\varphi(z) = \frac{1}{\cos z + h}$, h étant une constante : peut-on déterminer h de manière que $F(z)$ soit uniforme dans tout le plan?

Soit a un pôle de $\varphi(z)$; le résidu correspondant est $\frac{1}{-\sin a}$ ou $\frac{-1}{\pm\sqrt{1-h^2}}$, puisque $\cos a + h = 0$. En exprimant qu'il est égal à un entier n, nous avons

$$h^2 = 1 - \frac{1}{n^2} \qquad \text{ou} \qquad h = \pm\frac{\sqrt{n^2-1}}{n},$$

relation indépendante du pôle considéré. Donc, si h a une valeur de cette forme, la fonction $F(z)$ est uniforme; elle est de plus méromorphe, car (étant exclu le cas de $h = \pm 1$, c'est-à-dire $n = \infty$) les pôles de $\varphi(z)$ sont simples.

2º Soit $\varphi(z) = pz$; les pôles sont doubles et les résidus nuls : donc $F(z)$ est, dans tout le plan, une fonction uniforme de z, qui admet les pôles de pz comme points singuliers essentiels.

Exercice III. — *La fonction* $\varphi(z)$ *étant méromorphe dans tout le*

plan, quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que $\sqrt{\varphi(z)}$ *soit uniforme?*

Les seuls points critiques possibles de $\sqrt{\varphi(z)}$ sont (n° **100**, *Remarque*) les zéros et les pôles de $\varphi(z)$; autour de l'un d'eux, a, on a

$$\varphi(z) = (z-a)^m \psi(z),$$

$\psi(z)$ n'étant ni nul ni infini pour $z = a$. Donc

$$\sqrt{\varphi(z)} = (z-a)^{\frac{m}{2}} \sqrt{\psi(z)},$$

et, comme $\sqrt{\psi(z)}$ est holomorphe autour de a, il faut et il suffit, pour que $\sqrt{\varphi(z)}$ soit uniforme autour de ce point, que $\frac{m}{2}$ soit entier, c'est-à-dire que m soit pair.

Donc, *tous les zéros et tous les pôles de* $\varphi(z)$ *doivent être d'ordre pair*. S'il en est ainsi, il est clair que $\sqrt{\varphi(z)}$ est *méromorphe* dans tout le plan.

Exemples. — 1° Soit $\varphi(z) = 1 - \cos z$: cette fonction n'a pas de pôles; ses zéros sont $z = 2k\pi$; chacun d'eux est double, car la dérivée $\sin z$ s'y annule, et la dérivée seconde $\cos z$ ne s'y annule pas. Donc $\sqrt{1-\cos z}$ est une fonction uniforme dans tout le plan : c'est une fonction holomorphe, car elle n'a pas de pôles. Effectivement, la Trigonométrie montre que cette fonction est égale à $\sqrt{2}\sin\frac{z}{2}$.

2° Soit $\varphi(z) = pz + h$; peut-on déterminer la constante h de manière que $\sqrt{\varphi(z)}$ soit uniforme dans tout le plan?

Les pôles de $pz + h$ sont ceux de pz et sont doubles; il suffit donc que les zéros soient aussi d'ordre pair. Soit a l'un d'eux : s'il est multiple, il ne peut être que double, puisque $pz + h$ est une fonction elliptique d'ordre *deux*; il doit donc annuler simultanément $pz + h$ et $p'z$, c'est-à-dire qu'on a

$$p'a = 0, \qquad \text{d'où} \qquad a = \omega_\alpha + \text{période}$$

et

$$h = -pa = -e_\alpha.$$

Les valeurs cherchées de h sont donc les quantités $-e_1$, $-e_2$, $-e_3$.

On a d'ailleurs reconnu directement (n°s **200-201**) que les radicaux $\sqrt{pz - e_\alpha}$ sont bien des fonctions méromorphes de z dans tout le plan.

Exercice IV. — *Calculer l'intégrale réelle*

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{\cos x + h} \qquad (h \text{ réel et } > 1).$$

Faisons le changement de variable

$$e^{ix} = u;$$

lorsque x va, par valeurs réelles, de 0 à 2π, le point u décrit évidemment, dans son plan, une circonférence C, ayant pour centre l'origine et pour rayon 1. On a donc, puisque $dx = \frac{1}{i}\frac{du}{u}$,

$$I = \int_C \frac{1}{i} \frac{du}{u\left(\frac{u}{2} + \frac{1}{2u} + h\right)} = \frac{2}{i}\int_C \frac{du}{u^2 + 2hu + 1}.$$

Le trinome $u^2 + 2hu + 1$ a une seule racine, $u_0 = -h + \sqrt{h^2 - 1}$, comprise à l'intérieur de C, c'est-à-dire de module inférieur à 1; le résidu correspondant de la fonction $\frac{1}{u^2 + 2hu + 1}$ est

$$\frac{1}{2(u_0 + h)} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2\sqrt{h^2 - 1}}.$$

On a donc, par le théorème des résidus,

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{\cos x + h} = 2\pi i \frac{2}{i} \frac{1}{2\sqrt{h^2 - 1}} = \frac{2\pi}{\sqrt{h^2 - 1}}.$$

Exercice V. — *Intégrer la fonction $\frac{1}{z} e^z$ le long du contour d'un rectangle dont les côtés, parallèles aux axes, ont pour équations*

$$x = a, \quad x = -\lambda, \quad y = \lambda, \quad y = -\lambda \qquad (\lambda > 0),$$

en faisant tendre λ vers $+\infty$.

Si $a < 0$, le rectangle ne comprend aucun point critique de $\frac{1}{z}e^z$, et l'intégrale est nulle; si $a > 0$, le rectangle comprend le pôle $z = 0$; le résidu correspondant étant $+1$, l'intégrale, prise dans le sens positif, est $2\pi i$.

Je dis maintenant que l'intégrale le long de chacun des trois derniers côtés tend vers zéro pour λ infini.

Car :

1° Le long du côté $x = -\lambda$, on a

$$z = -\lambda + iy$$

et

$$\text{mod}\,\frac{1}{z}e^z = \text{mod}\,\frac{1}{-\lambda + iy}e^{-\lambda+iy} = \frac{e^{-\lambda}}{\sqrt{\lambda^2+y^2}} < \frac{e^{-\lambda}}{\lambda};$$

comme la longueur du côté est 2λ, l'intégrale correspondante a son module inférieur à $2\lambda\frac{e^{-\lambda}}{\lambda}$, ou $2e^{-\lambda}$, quantité nulle, pour $\lambda = \infty$.

2° Le long du côté $y = \pm\lambda$, on a

$$z = x \pm i\lambda$$

et

$$\text{mod}\,\frac{1}{z}e^z = \frac{e^x}{\sqrt{x^2+\lambda^2}} < \frac{e^x}{\lambda},$$

d'où, pour l'intégrale correspondante I,

$$\text{mod}\,\text{I} < \int_{-\lambda}^{a}\frac{e^x}{\lambda}dx = \frac{1}{\lambda}(e^a - e^{-\lambda}),$$

quantité qui tend bien vers zéro pour λ infini.

L'intégrale le long du contour se réduit donc à l'intégrale le long du premier côté $x=a$; le long de ce côté, on a $z = a + iy$, $dz = i\,dy$, et dès lors, par ce qui précède,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{a+iy}}{a+iy}i\,dy = \begin{cases} 2\pi i & \text{si} \quad a > 0, \\ 0 & \text{si} \quad a < 0. \end{cases}$$

En multipliant le numérateur et le dénominateur de la fonction sous le signe $\int$ par $a - iy$, et égalant les parties imaginaires dans les deux membres, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^a\frac{a\cos y + y\sin y}{a^2+y^2}dy = \begin{cases} 2\pi & \text{si} \quad a > 0, \\ 0 & \text{si} \quad a < 0, \end{cases}$$

équations qu'on peut écrire, *en mettant le signe de a en évidence,*

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{a\cos y + y\sin y}{a^2+y^2}dy = 2\pi e^{-a}, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{-a\cos y + y\sin y}{a^2+y^2}dy = 0.$$

Finalement, par addition et soustraction, on trouve les formules

$$a\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos y}{a^2+y^2}dy = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y\sin y}{a^2+y^2}dy = \pi e^{-a} \qquad (a > 0).$$

Exercice VI. — *La fonction $\varphi(z)$ étant méromorphe dans tout le plan, la fonction $f(u)$,*

$$f(u) = \varphi(a \log u), \qquad (a = \text{const.})$$

peut-elle être uniforme dans tout le plan de la variable u?

Les points critiques possibles de $f(u)$ sont (n° **100**, *Remarque*) le point $u = 0$, critique pour $\log u$, et les points u_i, où la valeur de $a \log u$ est celle d'un des pôles de $\varphi(z)$.

En un de ces points u_i, $f(u)$ devient infinie, et son inverse reste évidemment holomorphe aux environs : le point considéré est donc un pôle de $f(u)$.

Le seul point de branchement possible pour $f(u)$ est donc $u = 0$.

Lorsque la variable u tourne une fois autour de ce point, dans le sens positif, $a \log u$ se reproduit, augmenté de $2a\pi i$, et la fonction $\varphi(a \log u)$ devient $\varphi(a \log u + 2a\pi i)$: elle change donc, en général, de valeur, et le point $u = 0$ est un branchement.

Pour qu'il en soit autrement, il faut et il suffit que l'on ait

$$\varphi(a \log u) = \varphi(a \log u + 2a\pi i),$$

quel que soit u, c'est-à-dire que la fonction $\varphi(z)$ admette la période $2a\pi i$.

Si donc $\varphi(z)$ admet une période 2ω, et si a est égal à $\omega : \pi i$, la fonction $\varphi(a \log u)$ sera uniforme dans tout le plan de la variable u; le point $u = 0$ sera pour elle un point singulier essentiel.

Par exemple, la fonction $F(u)$,

$$F(u) = p(a \log u),$$

sera uniforme si a est égal à $\dfrac{m_1\omega_1 + m_2\omega_2}{\pi i}$, m_1 et m_2 désignant deux entiers, quelconques d'ailleurs, et $2\omega_1$, $2\omega_2$ étant les périodes de pz.

Exercice VII. — *Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des quantités de somme nulle; exprimer rationnellement en pu et $p'u$ la fonction elliptique*

$$\frac{\sigma(u - a_1)\sigma(u - a_2)\ldots\sigma(u - a_n)}{\sigma^n(u)}.$$

Soit $F(u)$ cette fonction; son seul pôle (à des périodes près) étant $u = 0$, et le résidu correspondant étant nécessairement nul, on a, par la formule d'Hermite,

$$F(u) = A_0 + A_1\, pu + A_2\, p'u + \ldots + A_{n-2}\, p^{(n-2)}u,$$

les A désignant des constantes à déterminer. Or, en exprimant que $F(u)$ s'annule pour $u = a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$, on trouve évidemment

$$F(u) = k \begin{vmatrix} 1 & pu & p'u & \ldots & p^{(n-2)}u \\ 1 & pa_1 & p'a_1 & \ldots & \ldots\ldots \\ . & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ 1 & pa_{n-1} & p'a_{n-1} & \ldots & p^{(n-2)}a_{n-1} \end{vmatrix},$$

k étant une constante, qu'on déterminera en égalant les coefficients de u^{-n} dans les développements des deux membres autour du pôle $u = 0$. Nous laissons au lecteur le soin de ce calcul.

Exercice VIII. — *Montrer que la fonction* $\frac{\sigma 2u}{\sigma^4 u}$ *est elliptique, et trouver son expression en* pu *et* $p'u$.

De la formule

$$\sigma(u + 2\omega_\alpha) = -e^{2\eta_\alpha(u+\omega_\alpha)}\sigma u,$$

on déduit

$$\sigma(u + 4\omega_\alpha) = e^{2\eta_\alpha(u+3\omega_\alpha)} e^{2\eta_\alpha(n+\omega_\alpha)} \sigma u = e^{2\eta_\alpha(2u+4\omega_\alpha)} \sigma u,$$

et l'on en conclut immédiatement que la fonction proposée admet les périodes $2\omega_1$, $2\omega_2$; elle est donc elliptique : son ordre est *trois*, car, dans un parallélogramme, son seul pôle est le pôle *triple* $u = 0$; ses trois zéros sont évidemment les demi-périodes ω_1, ω_2, ω_3. Elle a ainsi les mêmes zéros et les mêmes pôles que $p'u$, et ne diffère dès lors de cette fonction que par un facteur constant. Comme d'ailleurs, aux environs de $u = 0$, on a

$$\frac{\sigma 2u}{\sigma^4 u} = \frac{2}{u^3} + \ldots, \quad \text{et} \quad p'u = \frac{-2}{u^3} + \ldots,$$

le facteur constant est -1; et, par suite,

$$\frac{\sigma 2u}{\sigma^4 u} = -p'u.$$

Exercice IX. — *Intégrer un polynome entier en* pu *et* $p'u$.

En remplaçant, dans ce polynome, $p'^2 u$ par $4p^3 u - g_2 pu - g_3$, on le met sous la forme

$$P(pu) + p'u\, Q(pu),$$

P et Q étant des polynomes en pu. L'intégrale $\int Q(pu)p'u\,du$ se

calcule immédiatement; car, par le changement de variable $pu = z$, elle devient $\int Q(z)\,dz$, c'est-à-dire l'intégrale d'un polynome en z. Reste donc à calculer

$$\int P(pu)\,du \qquad \text{ou} \qquad \int p^m u\,du,$$

m étant entier et positif.

Au lieu d'avoir recours à la formule d'Hermite, on procédera comme il suit. On a

$$p''u = 6p^2u - \frac{1}{2}g_2,$$

d'où, par dérivations successives,

$$p'''u = 12pup'u, \qquad p^{\text{IV}}u = 12pu\left(6p^2u - \frac{1}{2}g_2\right) + 12(4p^3u - g_2pu - g_3)$$
$$= Ap^3u + Bpu + C,$$

A, B, C étant des constantes; et, en général, on aura

$$p^{(2n)}u = P_{n+1}(pu),$$

P étant un polynome entier, d'ordre $n+1$, en pu. Les relations ainsi obtenues

$$p''u = 6p^2u - \frac{1}{2}g_2, \qquad p^{\text{IV}}u = Ap^3u + Bpu + C, \qquad \ldots,$$
$$p^{(2n)}u = P_{n+1}(pu),$$

permettent d'exprimer successivement p^2u, p^3u, ... en fonction linéaire de pu, $p''u$, $p^{\text{IV}}u$, ..., et l'intégrale $\int p^m u\,du$ s'en déduit immédiatement.

Exemple. — Soit à calculer $\int p'^2u\,du$. On a, par ce qui précède,

$$p^{\text{IV}}u = 120p^3u - 18g_2pu - 12g_3,$$

d'où

$$p'^2u = 4p^3u - g_2pu - g_3 = \frac{1}{30}[p^{\text{IV}}u + 18g_2pu + 12g_3] - g_2pu - g_3$$

et

$$\int p'^2u\,du = \frac{1}{30}p''u + \frac{2}{5}g_2\zeta u - \frac{3}{5}g_3u + \text{const.}$$

Exercice X. — *Décomposer en éléments simples la fonction* $\dfrac{1}{p2u - pu}$.

Les zéros du dénominateur sont fournis par la formule

$$2u = \pm u + \text{Période},$$

d'où l'on tire, en prenant successivement le signe — et le signe +,

$$3u = 2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2 \qquad \text{et} \qquad u = 2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2,$$

ou, en négligeant les multiples des périodes,

$$u = \frac{2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2}{3}, \qquad (m_1, m_2 = 0, 1, 2), \qquad \text{et} \qquad u = 0.$$

Or $u = 0$ n'est pas un pôle de la fonction donnée, c'est un zéro; les seuls pôles, évidemment simples, sont donc les *huit* quantités

$$\alpha_i = \frac{2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2}{3},$$

m_1 et m_2 prenant les valeurs 0, 1, 2, le système 0, 0 excepté. Soit α_i l'une de ces quantités; le résidu correspondant de la fonction proposée est

$$\frac{1}{2p'(2\alpha_i) - p'\alpha_i},$$

et, comme on a trouvé

$$2\alpha_i = -\alpha_i + \text{Période},$$

$p'(2\alpha_i)$ est égal à $-p'\alpha_i$; le résidu est donc $-1 : 3p'\alpha_i$ et la formule d'Hermite donne

$$\frac{1}{p2u - pu} = -\sum \frac{1}{3p'\alpha_i}\zeta(u - \alpha_i) + \text{const.}$$

On détermine la constante en écrivant que la fonction s'annule pour $u = 0$; donc, finalement,

$$\frac{1}{p2u - pu} = -\sum \frac{1}{3p'\alpha_i}[\zeta(u - \alpha_i) + \zeta\alpha_i).$$

Exercice XI. — *Calculer les intégrales*

$$\int \frac{u\,du}{pu - e_\alpha}, \qquad \int \frac{du}{\sqrt{pu - e_\alpha}}.$$

Pour obtenir *la première,* observons que l'on a (n° 199)

$$\frac{1}{pu - e_\alpha} = \frac{1}{(e_\alpha - e_\beta)(e_\alpha - e_\gamma)}[p(u - \omega_\alpha) - e_\alpha],$$

d'où, en posant, pour simplifier, $(e_\alpha - e_\beta)(e_\alpha - e_\gamma) = \frac{1}{e'_\alpha}$,

$$\frac{1}{e'_\alpha}\int \frac{u\,du}{pu - e_\alpha} = \int u[p(u-\omega_\alpha) - e_\alpha]\,du$$
$$= -e_\alpha \frac{u^2}{2} + \int u\,p(u-\omega_\alpha)\,du,$$

et, en intégrant par parties,

$$\frac{1}{e'_\alpha}\int \frac{u\,du}{pu - e_\alpha} = -e_\alpha\frac{u^2}{2} - u\zeta(u-\omega_\alpha) + \int \zeta(u-\omega_\alpha)\,du$$
$$= -e_\alpha\frac{u^2}{2} - u\zeta(u-\omega_\alpha) + \log\sigma(u-\omega_\alpha).$$

La seconde intégrale se calcule par le changement de variable $pu = z$, d'où

$$\int \frac{du}{\sqrt{pu - e_\alpha}} = \int \frac{dz}{2(z - e_\alpha)\sqrt{(z-e_\beta)(z-e_\gamma)}};$$

et l'on est ramené à une quadrature classique (Tome I, n° **218**).

Exercice XII. — *Décomposer* $p2u$ *en éléments simples.*

Soient $2\omega_1$, $2\omega_2$ les périodes de pu; si l'on considère $p2u$ comme une fonction elliptique aux périodes $2\omega_1$, $2\omega_2$, ses pôles sont, à des périodes près, les points $u = 0$, $u = \omega_1$, $u = \omega_2$, $u = \omega_3$, dont chacun est évidemment double. On a d'ailleurs

$$p2u = \frac{1}{4u^2} + \ldots, \qquad p2(\omega_\alpha + t) = p2t = \frac{1}{4t^2} + \ldots,$$

d'où l'on tire, par la formule d'Hermite,

$$p2u = \frac{1}{4}[pu + p(u-\omega_1) + p(u-\omega_2) + p(u-\omega_3)] + \text{const}.$$

On détermine la constante en faisant $u = 0$; on a ainsi

$$\frac{1}{4u^2} + \lambda u^2 + \ldots = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{u^2} + \lambda' u^2 + \ldots + e_1 + e_2 + e_3 + \ldots\right) + \text{const.},$$

les termes non écrits s'annulant pour $u = 0$. Comme $e_1 + e_2 + e_3$ est nul, la constante elle-même est nulle, et il reste

$$4p2u = pu + p(u-\omega_1) + p(u-\omega_2) + p(u-\omega_3).$$

Exercice XIII. — *Étudier les fonctions $f(u)$ et $\varphi(u)$,*

$$f(u) = (e_2 - e_3)\sigma_{10}u + (e_3 - e_1)\sigma_{20}u + (e_1 - e_2)\sigma_{30}u,$$
$$\varphi(u) = e_1(e_2 - e_3)\sigma_{10}u + e_2(e_3 - e_1)\sigma_{20}u + e_3(e_1 - e_2)\sigma_{30}u.$$

D'une manière générale, la fonction *impaire* $a_1\sigma_{10} + a_2\sigma_{20} + a_3\sigma_{30}$ est (nº 202) elliptique, aux périodes $4\omega_1$, $4\omega_2$; ses pôles, dans un parallélogramme construit sur ces périodes, sont o, $2\omega_1$, $2\omega_2$, $2\omega_3$, pôles simples (*ibid.*).

Pour $f(u)$ et $\varphi(u)$, $u = 0$ n'est pas un pôle, car, aux environs de ce point, on a $\sigma_{\alpha 0}u = \frac{1}{u} + \ldots$, et le terme en $\frac{1}{u}$ disparaît dans $f(u)$ et $\varphi(u)$, parce que les sommes $\sum(e_\beta - e_\gamma)$ et $\sum e_\alpha(e_\beta - e_\gamma)$ sont nulles. On en conclut que $f(u)$ et $\varphi(u)$ sont des fonctions elliptiques d'ordre *trois*, aux mêmes pôles (simples) $2\omega_\alpha$.

Étudions de plus près les développements de $f(u)$ et $\varphi(u)$ autour de $u = 0$.

On a, en utilisant la formule du binome,

$$\begin{aligned}
\sigma_{\alpha 0}u = \sqrt{pu - e_\alpha} &= \frac{1}{u}\sqrt{1 - e_\alpha u^2 + c_1 u^4 + \ldots} \\
&= \frac{1}{u}[1 + (-e_\alpha u^2 + c_1 u^4 + \ldots)]^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{u} + \frac{1}{2u}(-e_\alpha u^2 + c_1 u^4 + c_2 u^6 + \ldots) \\
&\quad + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right)}{1.2.u}(-e_\alpha u^2 + c_1 u^4 + \ldots)^2 + \ldots \\
= \frac{1}{u} - \frac{1}{2}e_\alpha u &+ \left(\frac{-e_\alpha^2}{8} + \frac{c_1}{2}\right)u^3 + \left(\frac{c_2}{2} + \frac{c_1 e_\alpha}{4} - \frac{1}{16}e_\alpha^3\right)u^5 + \ldots,
\end{aligned}$$

d'où l'on tire sans difficulté, en tenant compte de $e_\alpha + e_\beta + e_\gamma = 0$,

$$f(u) = -\frac{1}{8}u^3 \sum e_\alpha^2(e_\beta - e_\gamma) + u^7(\quad) + \ldots,$$

$$\varphi(u) = -\frac{1}{2}u \sum e_\alpha^2(e_\beta - e_\gamma) + u^5(\quad) + \ldots.$$

Le point $u = 0$ est donc un zéro simple pour $\varphi(u)$ et triple pour $f(u)$: c'est, par suite, le seul zéro (à des périodes près) de $f(u)$, qui est d'ordre *trois*.

D'après cela, le quotient $\frac{\varphi(u)}{f(u)}$, qui n'a pas d'autres pôles que les

zéros de $f(u)$, admet le seul pôle $u=0$, qui est double ; et, autour de ce point, on a

$$\frac{\varphi(u)}{f(u)} = \frac{4}{u^2} + \lambda u^2 + \ldots.$$

Il n'y a pas de terme en $\frac{1}{u}$, puisque $\frac{\varphi(u)}{f(u)}$, quotient de deux fonctions impaires, est paire ; il n'y a pas de terme constant, parce que les termes en u^3 et u^5 manquent respectivement dans $\varphi(u)$ et $f(u)$.

On en conclut, par un raisonnement souvent fait, qu'on a identiquement

$$\frac{\varphi(u)}{f(u)} = p\left(\frac{u}{2}\right) = \frac{e_1(e_2-e_3)\sigma_{10}u + e_2(e_3-e_1)\sigma_{20}u + e_3(e_1-e_2)\sigma_{30}u}{(e_2-e_3)\sigma_{10}u + (e_3-e_1)\sigma_{20}u + (e_1-e_3)\sigma_{30}u}.$$

Exercice XIV. — *Exprimer $p\frac{u}{2}$ en fonction de pu.*

On pourrait partir de l'équation qui donne $p2u$ en fonction de pu ; il sera plus simple de profiter du résultat précédent.

Soit $pu = pu_0$, u_0 étant *donné* ; les valeurs de $p\left(\frac{u}{2}\right)$ seront évidemment

$$p\frac{u_0}{2}, \qquad p\left(\frac{u_0}{2}+\omega_1\right), \qquad p\left(\frac{u_0}{2}+\omega_2\right), \qquad p\left(\frac{u_0}{2}+\omega_3\right).$$

Or la formule finale de l'Exercice XIII, où l'on remplace u par u_0 et $\sigma_{\alpha 0}(u_0)$ par $\sqrt{pu_0 - e_\alpha}$, donne $p\frac{u_0}{2}$ en fonction de pu_0, les radicaux ayant la détermination qui, pour $u_0=0$, a la valeur principale $\frac{1}{u_0}$. Si, dans cette formule, on change u_0 en $u_0+2\omega_\alpha$, les fonctions $\sigma_{\beta 0}(u_0)$ et $\sigma_{\gamma 0}(u_0)$ changent de signe, $\sigma_{\alpha 0}(u_0)$ est inaltérée (n° **202**) : donc, enfin, les quatre valeurs de $p\frac{u}{2}$, lorsque pu est donné, sont fournies par la formule

$$p\frac{u}{2} = \frac{e_1(e_2-e_3)\sqrt{pu-e_1} + e_2(e_3-e_1)\sqrt{pu-e_2} + e_3(e_1-e_2)\sqrt{pu-e_3}}{(e_2-e_3)\sqrt{pu-e_1} + (e_3-e_1)\sqrt{pu-e_2} + (e_1-e_2)\sqrt{pu-e_3}},$$

les trois radicaux prenant tous les signes possibles, mais chacun d'eux ayant, au numérateur, le même signe qu'au dénominateur.

Exercice XV. — *Trouver la relation qui lie les périodes,* $2\omega_1$ et $2\omega_2$, *de pu, lorsque g_2 est nul.*

Soit posé

$$g_3 = 4a^3, \qquad \varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{3}}, \qquad \varepsilon^2 = e^{\frac{4\pi i}{3}};$$

ε et ε^2 sont les racines cubiques imaginaires de l'unité. On a, puisque $g_2 = 0$, $g_3 = 4a^3$,

$$e_1 = a, \qquad e_2 = \varepsilon a, \qquad e_3 = \varepsilon^2 a,$$

et, par suite, en vertu des formules du n° 204,

$$\omega_1 = \int_{\varepsilon a}^{\varepsilon^2 a} \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - 4a^3}}, \qquad \omega_2 = \int_{\varepsilon^2 a}^{a} \frac{dy}{\sqrt{4y^3 - 4a^3}}.$$

Posons, dans la seconde intégrale, $y = \varepsilon z$; nous trouvons

$$\omega_2 = \int_{\varepsilon a}^{\varepsilon^2 a} \frac{\varepsilon\, dz}{\sqrt{4z^3 - 4a^3}},$$

ce qui donne

$$\omega_2 = \varepsilon \omega_1.$$

Telle est la relation cherchée; réciproquement, si l'on a $\omega_2 = \varepsilon\omega_1$, je dis que g_2 est nul. Car, en substituant à ω_2 cette valeur, dans l'expression de g_2 en fonction des périodes (n° 185), on a

$$g_2 = \frac{60}{\omega_1^4} \sum{}' \frac{1}{(m_1 + \varepsilon m_2)^4},$$

ce qu'on peut écrire aussi, en remplaçant m_1 et m_2 respectivement par $m_2 - m_1$ et $-m_1$,

$$g_2 = \frac{60}{\omega_1^4} \sum{}' \frac{1}{(m_1 \varepsilon^2 + m_2)^4} = \frac{60}{\omega_1^4 \varepsilon} \sum{}' \frac{1}{(m_1 + \varepsilon m_2)^4};$$

on en conclut

$$g_2 \varepsilon = g_2, \qquad \text{d'où} \qquad g_2 = 0. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

La relation $\omega_2 = \varepsilon\omega_1$ peut prendre une autre forme : comme on a

$$\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0,$$

on aura aussi

$$\omega_1^2 + \omega_1\omega_2 + \omega_2^2 = 0.$$

Exercice XVI. — *Peut-on déterminer la constante λ de manière que $p(\lambda u)$ s'exprime rationnellement en fonction de pu?*

Si la fonction $p(\lambda u)$ est rationnelle en pu, elle admet les périodes $2\omega_1$ et $2\omega_2$ de pu. Réciproquement, si cette condition est remplie,

$p(\lambda u)$, fonction elliptique aux périodes $2\omega_1$ et $2\omega_2$, s'exprime rationnellement en pu et $p'u$: comme elle est paire, il est clair que $p'u$ ne peut, dans l'expression obtenue, figurer que par son carré, c'est-à-dire que $p(\lambda u)$ est rationnel en pu.

Tout revient donc à exprimer que $p(\lambda u)$ admet les périodes $2\omega_1$ et $2\omega_2$, c'est-à-dire qu'on a

$$p(\lambda u + 2\lambda\omega_\alpha) = p(\lambda u);$$

il faut et il suffit, pour cela, que $2\lambda\omega_1$ et $2\lambda\omega_2$ soient des périodes de pu. On a donc, en désignant par les m et n des entiers, quelconques d'ailleurs,

$$(1) \qquad \begin{cases} \lambda\omega_1 = m'\omega_1 + n'\omega_2, \\ \lambda\omega_2 = m\ \omega_1 + n\ \omega_2. \end{cases}$$

On en déduit, par division,

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{m'\omega_1 + n'\omega_2}{m\omega_1 + n\omega_2} \qquad \text{ou} \qquad m\omega_1^2 + (n - m')\omega_1\omega_2 - n'\omega_2^2 = 0,$$

relation quadratique homogène, à coefficients entiers, entre ω_1 et ω_2. Cette relation n'est une identité que si $m = n - m' = n' = 0$; les équations (1) donnent alors $\lambda = n$: le *multiplicateur* λ est donc un entier quelconque, et $p(\lambda u)$ s'exprime rationnellement en pu. C'est la *multiplication ordinaire*.

Si la relation quadratique n'est pas une identité, c'est-à-dire si les périodes sont liées par une équation du type

$$(2) \qquad A\omega_1^2 + B\omega_1\omega_2 + C\omega_2^2 = 0,$$

où A, B, C sont des entiers premiers entre eux, on pourra trouver une infinité de multiplicateurs λ, non entiers, répondant à la question posée.

Il suffit en effet de prendre

$$(3) \qquad \lambda = \frac{1}{\omega_2}[A\theta\omega_1 + \rho\omega_2],$$

θ et ρ désignant des entiers quelconques; on aura aussi, en vertu de (2),

$$(4) \qquad \lambda = \frac{1}{\omega_1}[(\rho - \theta B)\omega_1 - C\theta\omega_2],$$

de sorte que $2\lambda\omega_2$ et $2\lambda\omega_1$ seront bien des périodes de pu.

Pour que le rapport des périodes de pu soit imaginaire, il faut que $B^2 - 4AC$ soit négatif; dès lors la valeur (3) de λ, où l'on remplace

$\frac{\omega_1}{\omega_2}$ par sa valeur tirée de (2), est imaginaire, c'est-à-dire que tous les multiplicateurs sont imaginaires : de là le nom de *multiplication complexe,* donnée à la propriété dont il s'agit.

Il n'y a donc multiplication complexe que si les périodes vérifient une relation du type (2); on peut en donner de suite deux exemples simples.

1° Si g_2 est nul, on a vu (Exercice XV) que $\omega_2 = \varepsilon\omega_1$, ε étant une racine cubique imaginaire de l'unité, ce qu'on écrit aussi

$$\omega_1^2 + \omega_1\omega_2 + \omega_2^2 = 0,$$

relation du type (2). On aura un multiplicateur λ par la formule (3), où l'on fera

$$A = 1, \qquad \theta = 1, \qquad \rho = 0, \qquad \text{d'où} \qquad \lambda = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{1}{\varepsilon}.$$

Ainsi $p\left(\frac{u}{\varepsilon}, 0, g_3\right)$ doit s'exprimer rationnellement en fonction de $p(u, 0, g_3)$: effectivement, la formule d'homogénéité (8) du n° **206**, où l'on pose

$$\lambda = \varepsilon^2 \qquad \text{et} \qquad g_2 = 0,$$

donne

$$p\left(\frac{u}{\varepsilon}, 0, g_3\right) = \varepsilon^2 p(u, 0, g_3).$$

2° Si g_3 est nul, on a (n° **234**, Note)

$$\omega_2 = \omega_1 i,$$

ou

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 = 0,$$

relation du type (2). Un multiplicateur λ sera donné par (3), où l'on fera

$$A = \theta = 1, \qquad \rho = 0, \qquad \text{d'où} \qquad \lambda = \frac{1}{i}:$$

effectivement, si l'on pose, dans la formule d'homogénéité de pu,

$$\lambda = -1 \qquad \text{et} \qquad g_3 = 0,$$

on trouve

$$p\left(\frac{u}{i}, g_2, 0\right) = -p(u, g_2, 0).$$

Exercice XVII. — *Montrer que le rapport anharmonique des*

quatre tangentes que l'on peut mener à une cubique plane par un de ses points est constant, quel que soit ce point.

Supposons la cubique représentée paramétriquement (nº 215) sous la forme

$$(1) \qquad x = \frac{\alpha p'u + \beta pu + \gamma}{ap'u + bpu + c}, \qquad y = \frac{\alpha' p'u + \beta' pu + \gamma'}{ap'u + bpu + c},$$

et soit h l'argument d'un point quelconque M de la courbe. Les quatre tangentes T, T_1, T_2, T_3, menées de M à la cubique, touchent celle-ci respectivement (nº 219) aux points d'arguments $-\frac{h}{2}$, $-\frac{h}{2}+\omega_1$, $-\frac{h}{2}+\omega_2$, $-\frac{h}{2}+\omega_3$; soient $T=0$ l'équation cartésienne, en x et y, de la première; $Q=0$ celle d'une seconde droite, quelconque d'ailleurs, passant par M. Les droites issues de M auront pour équation générale $Q-\lambda T=0$, et la droite T correspond à $\lambda=\infty$. Les trois autres tangentes T_1, T_2, T_3 correspondront à des valeurs λ_1, λ_2, λ_3 de λ, et le rapport anharmonique (T, T_1, T_2, T_3) sera égal à $\frac{\lambda_3-\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}$.

Calculons maintenant λ_1, λ_2, λ_3.

Il suffit, pour obtenir λ_α, d'écrire que la droite $Q-\lambda_\alpha T=0$ passe par le point d'argument $-\frac{h}{2}+\omega_\alpha$ sur la cubique; on a donc

$$\lambda_\alpha = \frac{Q}{T},$$

en supposant les coordonnées courantes, x et y, remplacées, dans Q et T, par leurs valeurs au point $-\frac{h}{2}+\omega_\alpha$. Or, si l'on substitue à x et y, dans $Q:T$, leurs valeurs (1) en u, on obtient une fonction elliptique, $\varphi(u)$, du type

$$\frac{m'p'u + n'pu + r'}{mp'u + npu + r},$$

les m, n, r étant des constantes; les seuls pôles possibles de $\varphi(u)$ sont les zéros du dénominateur, c'est-à-dire les arguments des points où la droite $T=0$ coupe la cubique, à savoir h, $-\frac{h}{2}$, $-\frac{h}{2}$; les zéros possibles de $\varphi(u)$ sont de même les arguments des points où la droite $Q=0$ coupe la cubique, c'est-à-dire h, et deux quantités de somme égale à $-h$. Il en résulte que la fonction $\varphi(u)$ n'admet que le pôle

double $-\frac{h}{2}$, et, dès lors, en vertu de la formule d'Hermite, elle peut se mettre (n° **195**) sous la forme

$$\varphi(u) = a\,p\left(u + \frac{h}{2}\right) + b,$$

a et b étant des constantes.

Cela posé, d'après ce qui précède, on a

$$\lambda_\alpha = \varphi\left(-\frac{h}{2} + \omega_\alpha\right) = a e_\alpha + b,$$

et le rapport $\frac{\lambda_3 - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}$ est égal à $\frac{e_3 - e_2}{e_1 - e_2}$: il est donc indépendant de h, c'est-à-dire du point initial M, pris sur la cubique. C. Q. F. D.

Exercice XVIII. — *Montrer que si $\varphi(x, y)$ est fonction holomorphe de x et y aux environs du système de valeurs $x = a$, $y = b$, l'équation différentielle en y*

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx} = \varphi(x, y)$$

n'admet qu'une solution prenant la valeur b, pour $x = a$.

D'après le théorème de Cauchy (n^{os} **322-324**) l'équation (1) admet une solution, $y(x)$, qui se réduit à b pour $x = a$, et qui est fonction holomorphe de x autour du point a. Supposons qu'il y ait une seconde solution, holomorphe ou non, prenant, pour $x = a$, la valeur b, et représentons-la par $y(x) + u(x)$; la quantité $u(a)$ sera nulle et l'on aura

$$\frac{d(y+u)}{dx} = \varphi(x, y+u);$$

d'où

$$\frac{du}{dx} = \varphi(x, y+u) - \varphi(x, y).$$

Le second membre est une fonction holomorphe de u autour du point $u = 0$, en vertu même de l'hypothèse faite sur $\varphi(x, y)$; comme il s'annule pour $u = 0$, quels que soient x et y, il contient en facteur une puissance entière de u (n° **126**), et l'on a

$$\frac{du}{dx} = u^m\,\psi(x, y, u),$$

$\psi(x, y, u)$ ne devenant pas infini pour $v = 0$, du moins lorsque x et y

ont des valeurs suffisamment voisines de a et b. Supposons maintenant y et u remplacés, dans ψ, par $y(x)$ et $u(x)$; on pourra écrire

$$\frac{du}{u^m} = f(x)\,dx,$$

la fonction $f(x)$ demeurant finie aux environs de $x = a$. Intégrons les deux membres le long d'un petit arc quelconque partant du point a, nous avons

$$\frac{-1}{m-1}\left[\frac{1}{u^{m-1}(x)} - \frac{1}{u^{m-1}(a)}\right] = \int_a^x f(x)\,dx.$$

Le second membre est évidemment fini, le premier est infini, puisque $u(a)$ est nul; l'égalité est donc impossible.

Dans le cas où m serait égal à 1, on aurait

$$\log u(x) - \log u(a) = \int_a^x f(x)\,dx,$$

relation également impossible.

On en conclut que l'équation (1) ne peut admettre d'intégrale, se réduisant à b pour $x = a$, autre que l'intégrale holomorphe.

Ce théorème, par une autre démonstration, s'étend à un système différentiel canonique d'ordre quelconque.

FIN DU TOME SECOND.

32595 PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS,
Quai des Grands-Augustins, 55.

[illegible] Paris. — Imp. GAUTHIER-VILLARS, 55, quai des Grands-Augustins.

